قواعد أساسية في دراسة الدوال العددية

I- النهايات

1. بعض نهايات الدوال المرجعية

$\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$	
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$

2. نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$

النهاية عند $(\pm)\ \infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدّها الأعلى درجة عند $(\pm)\ \infty$

النهاية عند $(\pm)\ \infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدّين الأعلى درجة عند $(\pm)\ \infty$

مثال 1: $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2+2x+7 = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 = \boxed{+\infty}$

مثال 2: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+4x+4}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = \boxed{+\infty}$

3. حالات عدم التعيين

$$① \ \infty-\infty \quad ; \quad ② \ 0\times\infty \quad ; \quad ③ \ \frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad ④ \ \frac{0}{0}$$

4. طرق إزالة حالات عدم التعيين

أ. التحليل والاختزال

غالبا نستعمل هذه الطريقة عند حساب $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ حيث $f(x_0) = g(x_0) = 0$

في هذه الحالة نقوم بتحليل العبارتين f و g وكتابتهما على الشكل $(x-x_0)Q(x)$ ثم نختزل الكسر ونحسب النهاية من جديد.

مثال 1: $\lim\limits_{x\to1} \frac{4x^2+3x-7}{x^2+2x-3} = \lim\limits_{x\to1} \frac{(x-1)(4x+7)}{(x-1)(x+3)} = \lim\limits_{x\to1} \frac{4x+7}{x+3} = \boxed{\frac{11}{4}}$

مثال 2: $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^3+8}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to-2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)} = \lim\limits_{x\to-2} \frac{x^2-2x+4}{x-2} = \frac{12}{-4} = \boxed{-3}$

ملاحظة : توجد ثلاث طرق لإيجاد عبارة $Q(x)$ وهي:

1) المطابقة :

مثال: كتابة العبارة $4x^2+3x-7$ على الشكل $(x-1)Q(x)$

بما أنّ $Q(x)$ من الدرجة الأولى فهو يُكتب على شكل $ax+b$ ، منه :

$$(x-1)Q(x) = (x-1)(ax+b) = ax^2+(b-a)x-b$$

$$\begin{cases} a=4 \\ b-a=3 \\ -b=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{4x^2+3x-7 = (x-1)(4x+7)}$$

لاحظ أنّه لمّا يكون كثير الحدود من **الدرجة الثانية** ، يمكن تحليله مباشرة إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى على النحو التالي:

نقسم $4x^2$ على x فنحصل على $4x$ ونقسم -7 على -1 فنحصل على $+7$ ، فتكون النتيجة :

$$4x^2+3x-7 = (x-1)(4x+7)$$

2) القسمة الإقليدية :

$$\begin{array}{r|l} x^3+8 & x+2 \\ \cline{2-2} -x^3-2x^2 & x^2-2x+4 \\ -2x^2+8 & \\ 2x^2+4x & \\ 4x+8 & \\ -4x-8 & \\ 0 & \end{array}$$

3) خوارزمية هورنر: وهي أسهل الطرق على الإطلاق خاصة لمّا يكون كثير الحدود من الدرجة الثالثة فما فوق.

مثال 1: $P(x) = 4x^2 + 3x - 7$ ، $x_0 = 1$

معاملات $P(x)$	$c = -7$	$b = 3$	$a = 4$	
الجذر x_0			$\downarrow$	$x_0 = 1$
معاملات $Q(x)$	$c' = \mathbf{0}$	$b' = 7$	$a' = 4$	

$$\begin{cases} a' = a = 4 \\ b' = x_0.a' + b = 1(4) + 3 = 7 \\ c' = x_0.b' + c = 1(7) - 7 = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + 3x - 7 = (x-1)(4x+7)$$

مثال 2: $P(x) = x^3 + 8$ ، $x_0 = -2$

معاملات $P(x)$	$d = 8$	$c = 0$	$b = 0$	$a = 1$	
الجذر x_0				$\downarrow$	$x_0 = -2$
معاملات $Q(x)$	$d' = \mathbf{0}$	$c' = 4$	$b' = -2$	$a' = 1$	

$$\begin{cases} a' = a = 1 \\ b' = x_0.a' + b = -2(1) + 0 = -2 \\ c' = x_0.b' + c = -2(-2) + 0 = 4 \\ d' = x_0.c' + d = -2(4) + 8 = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

لاحظ أنّ المعامل الأخير يكون دائما معدوما (c' و d')

ب. استعمال المرافق (خاصة بالجذور التربيعية)

مثال 1:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x-1} - 1)(\sqrt{x-1} + 1)}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{(\sqrt{x-1} + 1)} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

مثال 2:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{x+8} - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{5-x} - 2)(\sqrt{5-x} + 2)(\sqrt{x+8} + 3)}{(\sqrt{x+8} - 3)(\sqrt{x+8} + 3)(\sqrt{5-x} + 2)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(\sqrt{x+8} + 3)}{(x-1)(\sqrt{5-x} + 2)} = \lim_{x\to 1} -\frac{(\sqrt{x+8} + 3)}{(\sqrt{5-x} + 2)} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

ملاحظة : لمّا يؤول x إلى ∞ ، إمّا أنّ نستعمل المرافق في حالة تساوي معاملات x داخل الجذر وخارجه (المثال 1) أو نستعمل التحليل في حالة عدم تساوي المعاملات (المثال 2)

مثال 1:

$$\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{x}+1-\sqrt{\boldsymbol{x^2}+x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x+1-\sqrt{x^2+x-2}\right)\left(x+1+\sqrt{x^2+x-2}\right)}{\left(x+1+\sqrt{x^2+x-2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2-(x^2+x-2)}{x+1+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{x+1+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)}\,(x\to+\infty\Rightarrow|x|=x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

مثال 2:

$$\lim_{x\to-\infty} \boldsymbol{2x}+1+\sqrt{\boldsymbol{x^2}+x-2}=\lim_{x\to-\infty}2x+1+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}2x+1+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}2x+1-x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\,(x\to-\infty\Rightarrow|x|=-x)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x\underbrace{\left(2+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)}_{\to1}=\boxed{-\infty}$$

ج. استعمال العدد المشتق

لاستعمال هذه الطريقة لا بدّ أن تكون النهاية من الشكل : $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ، وهذه النهاية تساوي العدد المشتق $f'(x_0)$

مثال 1:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

$$f(x)=\sqrt{x-1}\,;f(2)=1\,;f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,;f'(2)=\boxed{\frac{1}{2}}$$

مثال 2:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

$$f(x)=\sin x\;;f(0)=0\,;f'(x)=\cos x\;;f'(0)=\boxed{1}$$

5. نهاية دالة مركّبة

$$f=v\;o\;u\,;\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}u(x)=\boldsymbol{b}\\ \lim\limits_{x\to\boldsymbol{b}}v(x)=c\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=c$$

مثال:

$$\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\sqrt{\frac{4x^2-2x-1}{x^2-5x+3}}}_{f(x)};\ \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\dfrac{4x^2-2x-1}{x^2-5x+3}}_{u(x)}=\mathbf{4}\\ \lim\limits_{x\to\mathbf{4}}\underbrace{\sqrt{x}}_{v(x)}=2\end{cases}\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=2}$$

6. النهايات بالمقارنة

الحالة الأولى:

$$\begin{cases}g(x)\le f(x)\le h(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=l\end{cases}\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=l}$$

مثال:

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+\cos x}{1+x}$:

$$-1\le\cos x\le1\Rightarrow 2x-1\le 2x+\cos x\le 2x+1\Rightarrow\frac{2x-1}{1+x}\le\frac{2x+\cos x}{1+x}\le\frac{2x+1}{1+x}$$

ملاحظة : المتراجحة لم تتغيّر لأنّ $1+x>0$ $(x\to+\infty)$ ، أما إذا كان $x\to-\infty$ فإنّ $1+x<0$ ، منه تتغيّر المتراجحة عند القسمة على $(1+x)$.

$$\begin{cases}\dfrac{2x-1}{1+x}\le\dfrac{2x+\cos x}{1+x}\le\dfrac{2x+1}{1+x}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{1+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{1+x}=2\end{cases}\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\cos x}{1+x}=2}$$

الحالة الثانية:

$$\begin{cases}f(x)\ge g(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty\end{cases}\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$$

مثال:

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2-\sin x}$:

$$-1\le\sin x\le1\Rightarrow-1\le-\sin x\le1\Rightarrow1\le2-\sin x\le3\Rightarrow\frac{1}{3}\le\frac{1}{2-\sin x}\le1\Rightarrow\frac{x}{3}\le\frac{1}{2-\sin x}\le x$$

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2-\sin x}\ge\dfrac{x}{3}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{3}=+\infty\end{cases}\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2-\sin x}=+\infty}$$

الحالة الثالثة:

$$\begin{cases}f(x)\le g(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty\end{cases}\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty}$$

مثال:

احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}-2x^2+x\cos x$:

$$-1\le\cos x\le1\xRightarrow[(x<0)]{}x\le x\cos x\le-x\Rightarrow-2x^2+x\le-2x^2+x\cos x\le-2x^2-x$$

$$\begin{cases}-2x^2+x\cos x\le-2x^2-x\\ \lim\limits_{x\to-\infty}-2x^2-x=-\infty\end{cases}\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to-\infty}-2x^2+x\cos x=-\infty}$$

ملاحظة : غالبا ما نستعمل المقارنة لحساب نهايات الدوال المثلثية $(\sin x\,;\cos x)$ لمّا x يؤول إلى $(\pm)\infty$ ، حيث أنّ هذه الدوال لا تقبل نهاية عند $(\pm)\infty$.

ولحصر $f(x)$ دائما ننطلق من حصر الدالة المثلثية $(\sin x\,;\cos x)$ بين (-1) و$(+1)$

7. المستقيمات المقاربة

1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty\Rightarrow$ المستقيم $\boldsymbol{x=a}$ مستقيم مقارب عمودي (يوازي محور التراتيب)

2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b\Rightarrow$ المستقيم $\boldsymbol{y=b}$ مستقيم مقارب أفقي (يوازي محور الفواصل)

3) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-(ax+b)=0\Rightarrow$ المستقيم $\boldsymbol{y=ax+b}$ مستقيم مقارب مائل

ملاحظة :

1) إذا كانت $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ و $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$ ، فإنّ المستقيم $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

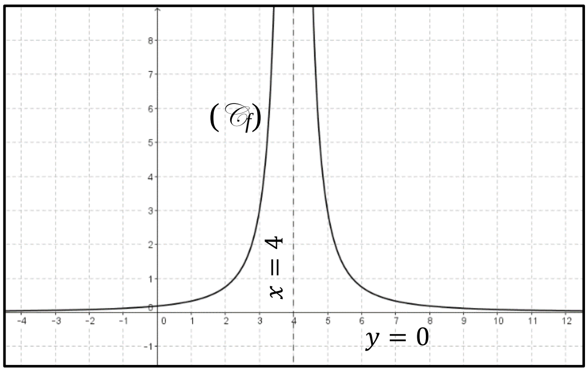
2) قد يكون للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مستقيمين مقاربين أحدهما بجوار $(-\infty)$ والآخر بجوار $(+\infty)$

مثال 1: $\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{(x-4)^2}}$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{3}{(x-4)^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to4\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to4\\<}} \frac{3}{(x-4)^2} = +\infty \,;\, \lim_{\substack{x\to4\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to4\\>}} \frac{3}{(x-4)^2} = +\infty$$

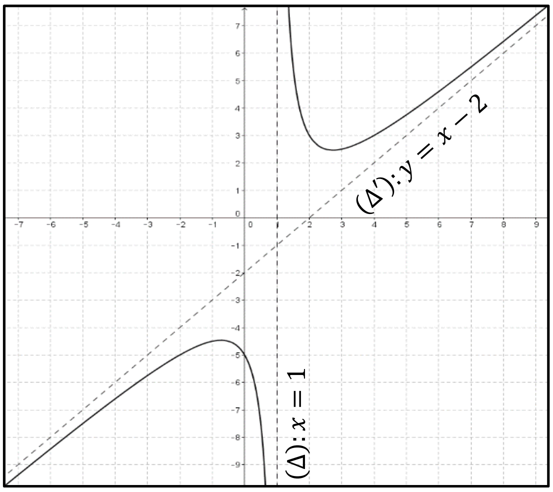
يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مستقيما مقاربا عموديا معادلته : $\boxed{x = 4}$ وآخر أفقيا معادلته : $\boxed{y = 0}$



مثال 2: $\boldsymbol{f(x) = x - 2 + \frac{3}{x-1}}$

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = -\infty \,;\, \lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = +\infty \,;\, \lim_{|x|\to+\infty} f(x) - (x-2) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{3}{x-1} = 0$$

يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مستقيما مقاربا عموديا $\boxed{(\Delta): x = 1}$ وآخر مائلا $\boxed{(\Delta'): y = x - 2}$



II- الاستمرارية والاشتقاقية

1. الاستمرارية

تكون الدالة f مستمرة عند x_0 إذا وفقط إذا : $\lim_{\substack{x\to x_0\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\>}} f(x) = f(x_0)$

مثال : $x_0 = 1$ ، $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3}{x+1} & ; \quad x > 1 \\ \sqrt{x^2+3} & ; \quad x \le 1 \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\<}} \sqrt{x^2+3} = \boxed{2} \,;\, \lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\>}} \frac{x^2+3}{x+1} = \boxed{2} \,;\, f(1) = \sqrt{1+3} = \boxed{2}$$

$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = f(1) \Rightarrow$ $\boxed{\text{الدالة } f \text{ مستمرة عند } x_0 = 1}$

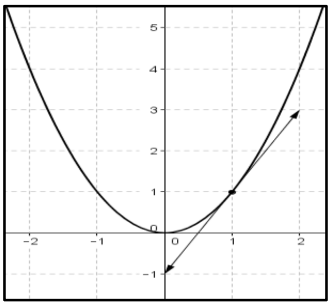
2. الاشتقاقية

تكون الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \ (l \neq \infty)$$

3. التفسير الهندسي

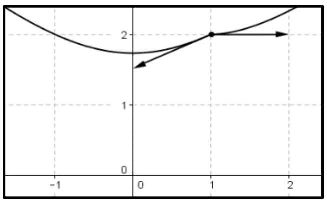
- $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$: يقبل المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة x_0 مماسا معادلته : $\boldsymbol{y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)}$
- $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l;\ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l'$: يقبل المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة x_0 نصفي مماسين ميليهما l و l' على الترتيب
- $f'(x_0) = 0$: يقبل المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة x_0 مماسا أفقيا معادلته : $\boldsymbol{y = f(x_0)}$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$: يقبل المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة x_0 نصف مماس عمودي (يوازي محور التراتيب)
- $f''(x_0) = 0$: يقبل المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ نقطة انعطاف $\boldsymbol{\omega(x_0; f(x_0))}$ وتتغير وضعية $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة للمماس عند هذه النقطة.



مثال 1: $f(x) = x^2$ ، $x_0 = 1$ ، $f'(x_0) = 2$ ، $(T): y = 2x - 1$

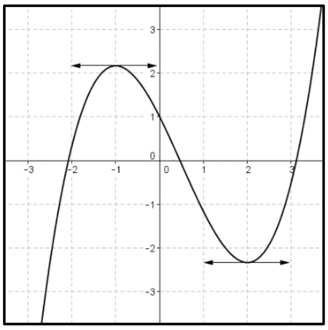
مثال 2: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3}{x+1} & ; \quad x > 1 \\ \sqrt{x^2+3}\,; & \quad x \leq 1 \end{cases}$ ، $x_0 = 1$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ ;\ \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \mathbf{0}$$



التفسير البياني للنتيجة : يقبل المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة 1

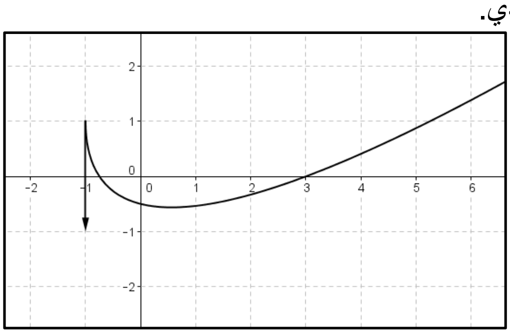
مثال 3: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ ، $f'(x) = x^2 - x - 2$ ، $f'(-1) = 0$ ، $f'(2) = 0$ ، $(T_{-1}): y = \frac{13}{6}$ ، $(T_2): y = -\frac{7}{3}$



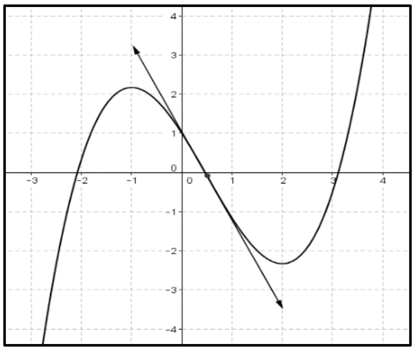
مثال 4: $g(x) = x + 2 - \frac{5}{2}\sqrt{x+1}$ ، $Dg = [-1; +\infty[$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{g(x)-1}{x+1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{x+1-\frac{5}{2}\sqrt{x+1}}{x+1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} 1 - \frac{5}{2\sqrt{x+1}} = \boxed{-\infty}$$

تفسير النتيجة بيانيا : الدالة g غير قابلة للاشتقاق عند النقطة ذات الفاصلة (1-) ويقبل المنحنى $(\mathcal{C}_g)$ نصف مماس عمودي.



مثال 5: $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$ ، $f'(x)=x^2-x-2$ ، $f''(x)=2x-1$ ، $f''\left(\frac{1}{2}\right)=0$ ، $\omega\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{12}\right)$ نقطة انعطاف.



4. مبرهنة القيم المتوسطة

أ. لبيان أنّ المعادلة $g(x)=c$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]a;b[$

نبيّن أنّ الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]a;b[$ وأنّ $g(a)<c<g(b)$ إذا كانت g متزايدة أو $g(b)<c<g(a)$ إذا كانت g متناقصة.

إذا كانت المعادلة $g(x)=0$ ، يكفي أن نبيّن أنّ الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]a;b[$ وأنّ : $g(a)\times g(b)<0$.

ب. لتعيين حصر للحل α

نقوم بتقسيم المجال $]a;b[$ من خلال حساب $g\left(\frac{a+b}{2}\right)$ فنأخذ نصف المجال الذي يشمل α ونلغي النصف الثاني ، ثمّ نواصل العملية حتى نصل إلى الحصر المطلوب.

(انظر الملحق الخاص بكيفية استعمال الحاسبة لحصر الحل α في نهاية الكتاب)

ج. لكتابة $f(\alpha)$ بدلالة α وتعيين حصر للعدد $f(\alpha)$

ننطلق دائما من المعادلة $g(\alpha)=0$ لكتابة α^3 أو e^{α} أو $\ln\alpha$ بدلالة α ، ثمّ نعوّض العبارة المتحصل عليها في الدالة f.

مثال: $g(x)=x^3-3x-4$ ، $f(x)=\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$

1. بيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ، حيث $\alpha\in]2;3[$

$g(2)=-2$ ، $g(3)=14$. الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]2;3[$ ، $g(2)\times g(3)<0$ منه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال$]2;3[$

2. تعيين حصر للعدد α بالتقريب إلى 10^{-1}

$$\begin{cases} \boldsymbol{g(2)=-2} \\ \boldsymbol{g(2,5)\approx 4,13} \\ g(3)=14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{g(2)=-2} \\ \boldsymbol{g(2,25)\approx 0,64} \\ g(2,5)\approx 4,13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} g(2)=-2 \\ \boldsymbol{g(2,1)\approx -1,04} \\ \boldsymbol{g(2,2)\approx 0,05} \end{cases}$$

من النتائج السابقة ، نستنتج أنّ : $\boxed{2,1<\alpha<2,2}$

3. بيان أنّ: $f(\alpha)=\frac{3\alpha+4}{2}$

$$g(\alpha)=\alpha^3-3\alpha-4=0\Rightarrow \alpha^3=3\alpha+4$$

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^3+2\alpha^2}{\alpha^2-1}=\frac{\alpha^3\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)}{\frac{\alpha^3}{\alpha}-1}=\frac{(3\alpha+4)\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)}{\frac{3\alpha+4}{\alpha}-1}=\frac{3\alpha^2+10\alpha+8}{2\alpha+4}$$

$$f(\alpha)=\frac{(\alpha+2)(3\alpha+4)}{2(\alpha+2)}=\boxed{\frac{3\alpha+4}{2}}$$

4. تعيين حصر لـ $f(\alpha)$

$$2,1<\alpha<2,2\Rightarrow 6,3<3\alpha<6,6\Rightarrow 10,3<3\alpha+4<10,6\Rightarrow \frac{10,3}{2}<\frac{3\alpha+4}{2}<\frac{10,6}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{5,15<f(\alpha)<5,3}$$

III- الشفعية والتناظر

- لبيان أنّ الدالة f زوجية نتحقّق أولا أنّ Df متناظر بالنسبة إلى 0 ، ثمّ نبيّن أنّه من أجل كل $x \in Df$ فإنّ : $f(-x) = f(x)$. في هذه الحالة يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ محور تناظر.
- لبيان أنّ الدالة f فردية نتحقّق أولا أنّ Df متناظر بالنسبة إلى 0 ، ثمّ نبيّن أنّه من أجل كل $x \in Df$ فإنّ : $f(-x) = -f(x)$. في هذه الحالة يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مركز تناظر.

1. **لبيان أنّ المستقيم ذي المعادلة $x = a$ محور تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$**

نتحقّق أولا أنّه من أجل كل $x \in Df$ فإنّ $(2a - x) \in Df$ ، ثمّ نبيّن أنّ : $f(2a - x) = f(x)$.

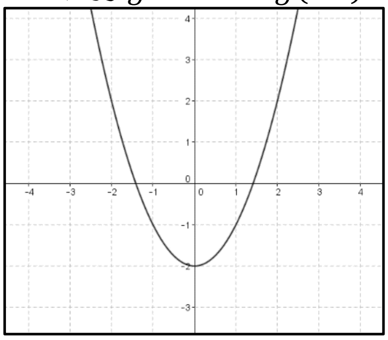
2. **لبيان أنّ النقطة $\omega(a; b)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$**

نتحقّق أولا أنّه من أجل كل $x \in Df$ فإنّ $(2a - x) \in Df$ ، ثمّ نبيّن أنّ : $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

مثال 1: $g(x) = x^2 - 2$ ، $Dg = \mathbb{R}$

Dg متناظر بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإنّ :

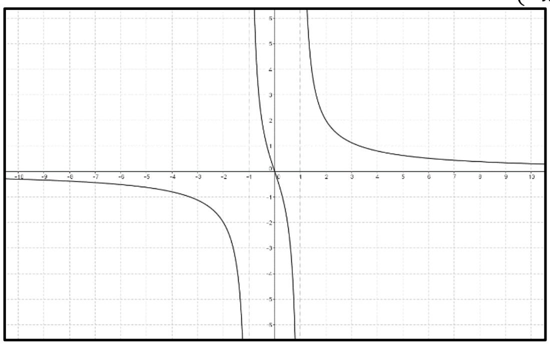
$g(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = g(x)$ ، منه الدالة g زوجية



مثال 2: $f(x) = \frac{3x}{x^2-1}$ ، $Df = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

Df متناظر بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل $x \in Df$ فإنّ :

$f(-x) = \frac{3(-x)}{(-x)^2-1} = -\frac{3x}{x^2-1} = -f(x)$ ، منه الدالة f فردية



مثال 3: $f(x) = \frac{2x^2-8x+7}{x^2-4x+3}$ ، $Df = \mathbb{R} - \{1; 3\}$

بيان أنّ المستقيم $(\Delta): x = 2$ محور تناظر لـ $(\mathscr{C}_f)$

يكون المستقيم $(\Delta): x = 2$ محور تناظر لـ $(\mathscr{C}_f)$ إذا وفقط إذا : $\begin{cases} (4 - x) \in Df \\ f(4 - x) = f(x) \end{cases}$

$$x \in Df \Rightarrow x \notin \{1; 3\} \Rightarrow -x \notin \{-1; -3\} \Rightarrow 4 - x \notin \{3; 1\} \Rightarrow 4 - x \in Df$$

$$f(4 - x) = \frac{2(4 - x)^2 - 8(4 - x) + 7}{(4 - x)^2 - 4(4 - x) + 3}$$

$$= \frac{2x^2 - 16x + 32 - 32 + 8x + 7}{x^2 - 8x + 16 - 16 + 4x + 3} = \frac{2x^2 - 8x + 7}{x^2 - 4x + 3} = f(x)$$

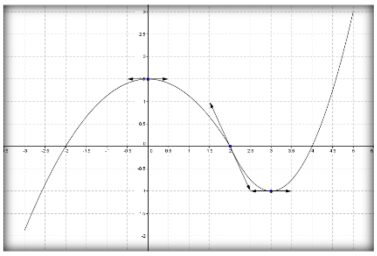
مثال 4: $f(x) = \frac{x^2+4x+2}{x-1}$ ، $Df = \mathbb{R} - \{1\}$

بيان أنّ النقطة $\omega(1; 6)$ مركز تناظر لـ $(\mathscr{C}_f)$

تكون $\omega(1; 6)$ مركز تناظر لـ $(\mathscr{C}_f)$ إذا وفقط إذا : $\begin{cases} (2 - x) \in Df \\ f(2 - x) + f(x) = 12 \end{cases}$

$$x \in Df \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow -x \neq -1 \Rightarrow 2 - x \neq 1 \Rightarrow 2 - x \in Df$$

$$f(2-x)+f(x)=\frac{(2-x)^2+4(2-x)+2}{2-x-1}+\frac{x^2+4x+2}{x-1}$$
$$=\frac{x^2-4x+4+8-4x+2}{1-x}+\frac{x^2+4x+2}{x-1}$$
$$=\frac{-x^2+8x-14+x^2+4x+2}{x-1}=\frac{12x-12}{x-1}=\frac{12(x-1)}{x-1}=\boxed{12}$$



IV- استعمال التمثيل البياني وجدول التغيّرات

1. القراءة البيانية

مثال:

من المنحنى المقابل يمكننا استنتاج ما يلي:

1. تعيين : $f''(2)\,;(f\circ f)'(2)\,;f'(3)\,;f'(2)\,;f(2)$

$f(2)=0\,;f'(2)=-2\,;f'(3)=0$ (مماس أفقي)$;f''(2)=0$ (نقطة انعطاف)

$(f\circ f)'(2)=(f'\circ f)(2)\times f'(2)=f'(0)\times f'(2)=0(-2)=0$

2. حل بيانيا المتراجحتين: $f(x)<0$ ، $f'(x)\geq 0$

أ) $f(x)<0$: $S=[-3;-2[\cup]2;4[$

ب) $f'(x)\geq 0$: $S=[-3;0]\cup[3;5]$

3. كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة 2

$y=f'(2)(x-2)+f(2)=-2(x-2)\Rightarrow \boxed{(T): y=-2x+4}$

4. جدول تغيرات الدالة f

x	-3		0		3		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-1,8$	$\nearrow$	$1,5$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

5. بيان أنّ المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[3;5]$

الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $[3;5]$ و $f(3)<2<f(5)$ ، منه المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[3;5]$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

6. جدول تغيرات الدالة g المعرّفة بـ: $g(x)=2\sqrt{f(x)}$

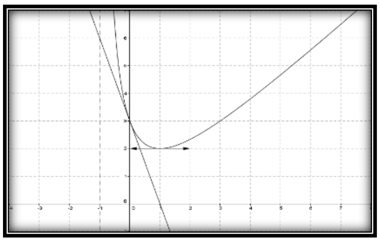
$g(x)=2\sqrt{f(x)}\Rightarrow Dg=[-2;2]\cup[4;5]\,;\ g'(x)=\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$

$g(-2)=2\sqrt{f(-2)}=0\,;\ g'(0)=\dfrac{f'(0)}{\sqrt{f(0)}}=\dfrac{0}{\sqrt{1,5}}=0\,;g(0)=2\sqrt{f(0)}=2\sqrt{1,5}\approx 2,45\,;$

$g(2)=2\sqrt{f(2)}=0\,;g(4)=2\sqrt{f(4)}=0\,;\ g(5)=2\sqrt{f(5)}=2\sqrt{3}\approx 3,46$

x	-2		0		2		4		5
$g'(x)$		$+$	0	$-$				$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$2,45$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$3,46$

2. استنتاج عبارة دالة من خلال تمثيلها البياني أو جدول تغيّراتها



مثال 1: $g(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

$$g'(x) = a - \frac{c}{(x+1)^2}$$

$$\begin{cases} g(0) = 3 \\ g'(1) = 0 \\ g'(0) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = 3 \\ a - \dfrac{c}{4} = 0 \\ a - c = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -c + 3 \\ \dfrac{3c}{4} = 3 \\ a = c - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = 4 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{g(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}}$$

مثال 2: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$ ، $f'(x) = a - \frac{c}{(x+d)^2}$

x	$-\infty$		-3		-1		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		↗	$f(-3)$	↘	‖	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	

$Df = \mathbb{R} - \{-1\} \Rightarrow -1 + d = 0 \Rightarrow \boldsymbol{d = 1}$

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - \dfrac{c}{4} = 0 \\ b + c = 0 \\ a + b + \dfrac{c}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{c}{4} \\ b = -c \\ -\dfrac{c}{4} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a = 1} \\ \boldsymbol{b = -4} \\ \boldsymbol{c = 4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{f(x) = x - 4 + \frac{4}{x+1}}$$

3. المناقشة البيانية

لمناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول معادلة ما **لا بدّ** من استخراج عبارة الدالة المُمثّلة بيانيا من المعادلة ، وتكون المعادلة النهائية على أحد الأشكال التالية:

- $m = f(x)$: في هذه الحالة ندرس تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيم المتحرك الموازي لمحور الفواصل.
- $ax + m = f(x)$: في هذه الحالة ندرس تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيم المتحرك الموازي للمستقيم الذي ميله a (غالبا ما يكون مستقيما مقاربا مائلا أو مماسا).
- $m^2 = f(x)$ أو $|m| = f(x)$: في هذه الحالة ندرس تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيم المتحرك الموازي لمحور الفواصل مع مراعاة أن تكون بداية الدراسة من محور الفواصل وليس من الأسفل كما هو الحال في المناقشتين السابقتين.
- $mx = f(x)$: في هذه الحالة ندرس تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيم الذي يدور حول المبدأ.

ملاحظات :

1. تُحدّد قيم m من خلال تقاطع المستقيم المتحرك مع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$
2. يكون الحل موجبا إذا كانت نقطة التقاطع على يمين محور التراتيب ، ويكون سالبا إذا كانت نقطة التقاطع على يسار محور التراتيب.
3. إذا كان المستقيم المتحرك مماسا للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يكون الحل مضاعفا.

جدول تلخيصي للتفسير الهندسي

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$	$(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x = a$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$	$(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y = b$
$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$	$(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = ax + b$
$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$	$(\mathscr{C}_f)$ يقبل مماسا أفقيا عند النقطة $(a; f(a))$
$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$	$(\mathscr{C}_f)$ يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة $(a; f(a))$
$\lim_{x\to\infty}[f(x) - g(x)] = 0$	المنحنيان $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ متقاربان بجوار ∞
$f(-x) + f(x) = 0$	الدالة f فردية و $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مركز تناظر (المبدأ)
$f(-x) - f(x) = 0$	الدالة f زوجية و $(\mathscr{C}_f)$ يقبل محور تناظر (التراتيب)
$f(2a - x) = f(x)$	المستقيم : $x = a$ محور تناظر لـ $(\mathscr{C}_f)$
$f(2a - x) + f(x) = 2b$	النقطة $\omega(a; b)$ مركز تناظر لـ $(\mathscr{C}_f)$
$g(x) = f(x)$	المنحنيان $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ متطابقان
$g(x) = f(-x)$	$(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ متناظران بالنسبة لمحور التراتيب
$g(x) = -f(x)$	$(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ متناظران بالنسبة لمحور الفواصل
$g(x) = -f(-x)$	$(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ متناظران بالنسبة للمبدأ
$g(x) = f(x + a) + b$	$(\mathscr{C}_g)$ صورة $(\mathscr{C}_f)$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\binom{-a}{b}$
$g(x) = f(\|x\|)$	• الدالة g زوجية • من أجل $x > 0$: $g(x) = f(x)$ $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ متطابقان • من أجل $x < 0$: نكمل رسم $(\mathscr{C}_g)$ بالتناظر المحوري (بالنسبة لمحور التراتيب)
$g(x) = \|f(x)\|$	• من أجل $f(x) > 0$: $g(x) = f(x)$ $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ متطابقان • من أجل $f(x) < 0$: $g(x) = -f(x)$ $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ متناظران بالنسبة لمحور الفواصل (المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ دائما فوق محور الفواصل)
تعيين تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ مع محور الفواصل	نحلّ المعادلة $f(x) = 0$
تعيين تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ مع محور التراتيب	نحسب $f(0)$
كتابة معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0	$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
كتابة معادلة المماس الذي معامل توجيهه a	نعيّن x_0 حيث $f'(x_0) = a$ ثمّ نكتب معادلة المماس
كتابة معادلة المماس الذي يشمل النقطة $(a; b)$	نعيّن x_0 حيث $b = f'(x_0)(a - x_0) + f(x_0)$ ثمّ نكتب معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0

قواعد أساسية في دراسة الدوال الأسّية

1. توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ تحقّق $f' = f$ و $f(0) = 1$ نرمز إليها بالرمز $f(x) = e^x$ وتُسمى الدالة الأسّية.
2. العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة الأسّية حيث $f(1) = e$. $(e \approx 2{,}718)$
3. **خواص الدالة الأسّية :**

$$e^0 = 1 \;;\; e^{-x} = \frac{1}{e^x} \;;\; e^x.e^y = e^{x+y} \;;\; \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \;;\; (e^x)^n = e^{nx}$$

مثال :

$$(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x.e^{-x} = e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}} + 2 = \boxed{\frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{e^{2x}}}$$

4. **نهايات الدالة الأسّية :**

$$① \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \;;\; ② \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \;;\; ③ \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$④ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \;;\; ⑤ \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

مثال :

$$1)\; \lim_{x\to+\infty} e^{2x} - 2e^x = \lim_{x\to+\infty} e^x(e^x - 2) = \boxed{+\infty}$$

$$2)\; \lim_{x\to-\infty} e^{2x} + e^x - 4 = \boxed{-4}$$

$$3)\; \lim_{x\to0^-} (1-x)e^{\frac{1}{x}} + 2 = \boxed{2} \left(\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty \,;\, \lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0\right)$$

$$4)\; \lim_{x\to0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} ;\; X = 2x \;;\; \lim_{X\to0} \frac{e^X - 1}{X} = \boxed{1}$$

$$5)\; \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} e^{x+1} = \boxed{+\infty}$$

$$6)\; \lim_{x\to-\infty} (x^2 + 2x + 2)e^x = \lim_{x\to-\infty} x^2e^x + 2xe^x + 2e^x = \boxed{0}$$

5. **اتجاه تغيّر الدالة الأسّية :**

الدالة الأسّية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $(e^x)' = e^x$ ، $\left[e^{u(x)}\right]' = u'(x)e^{u(x)}$

الدالة الأسّية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، منه نستنتج أنّ :

- المعادلة $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ تكافئ المعادلة $u(x) = v(x)$
- المتراجحة $e^{u(x)} > e^{v(x)}$ تكافئ المتراجحة $u(x) > v(x)$
- المتراجحة $e^{u(x)} < e^{v(x)}$ تكافئ المتراجحة $u(x) < v(x)$

مثال 1: حساب المشتقات

$$1)\; f(x) = e^x + 3e^{-x+2} - x \;;\; \boxed{f'(x) = e^x - 3e^{-x+2} - 1}$$

$$2)\; f(x) = e^{-2x} - e^{-3x} + 4 \;;\; \boxed{f'(x) = -2e^{-2x} + 3e^{-3x}}$$

$$3)\; f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} - 3} ;\; f'(x) = \frac{e^x(e^{2x} - 3) - 2e^{2x}.e^x}{(e^{2x} - 3)^2} = \boxed{-\frac{e^x(e^{2x} + 3)}{(e^{2x} - 3)^2}}$$

$$4)\; f(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} ;\; f'(x) = \frac{2e^{-2x}(1 + e^{-2x}) + 2e^{-2x}(1 - e^{-2x})}{(1 + e^{-2x})^2} = \boxed{\frac{4e^{-2x}}{(1 + e^{-2x})^2}}$$

مثال 2: حل المعادلات والمتراجحات

1) $e^{-5x} = e \Rightarrow -5x = 1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{5}}$

2) $e^{2x+1} - (e^x)^3 = 0 \Rightarrow e^{2x+1} = e^{3x} \Rightarrow 2x + 1 = 3x \Rightarrow \boxed{x = 1}$

3) $e^{2x} - e^x - 20 = 0\ ;\ X = e^x; X^2 - X - 20 = 0 \Rightarrow X = -4$ أو $X = 5$

$e^x = 5 \Rightarrow \boxed{x = \ln 5}$ (الحل $4-$ مرفوض لأنّ $e^x > 0$)

4) $e^{2x^2} \le e^{5x+3} \Rightarrow 2x^2 \le 5x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 \le 0$

$\Delta = 49\ ;\ x' = -\frac{1}{2}; x'' = 3\ ;\ \boxed{S = \left[-\frac{1}{2}; 3\right]}$

6. المعادلات التفاضلية :

- حلول المعادلة التفاضلية $y' = ay$ هي : $y = ce^{ax}$ ، $c \in \mathbb{R}$
- حلول المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هي : $y = ce^{ax} - \frac{b}{a}$ ، $c \in \mathbb{R}$

مثال :

1. $f' = 3f$ و $f(0) = 1$

$f' = 3f \Rightarrow f(x) = ce^{3x}\ ;\ f(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \boxed{f(x) = e^{3x}}$

2. $f' - 2f = 4$ و $f(1) = 0$

$f' - 2f = 4 \Rightarrow f' = 2f + 4 \Rightarrow f(x) = ce^{2x} - \frac{4}{2} = ce^{2x} - 2$

$f(1) = 0 \Rightarrow ce^2 - 2 = 0 \Rightarrow c = \frac{2}{e^2} = 2e^{-2} \Rightarrow \boxed{f(x) = 2e^{-2}e^{2x} - 2 = 2(e^{2x-2} - 1)}$

3. $f' - 3f + 3 = 0$ و $f'(0) = 3$

$f' - 3f + 3 = 0 \Rightarrow f' = 3f - 3 \Rightarrow f(x) = ce^{3x} + 1$

$f'^{(0)} = 3 \Rightarrow 3ce^{3(0)} = 3 \Rightarrow 3c = 3 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \boxed{f(x) = e^{3x} + 1}$

قواعد أساسية في دراسة الدوال اللوغاريتمية

1. من أجل كل عدد حقيقي a موجب تماما ، يوجد عدد حقيقي وحيد x حيث : $e^x = a$ يُسمّى العدد x اللوغاريتم النيبيري للعدد a حيث : $x = \ln a$
2. الدالة اللوغاريتمية $f(x) = \ln x$ مُعرّفة على المجال $]0; +\infty[$
3. **خواص الدالة اللوغاريتمية :**

① $\ln x = y \Rightarrow x = e^y$; ② $e^{\ln x} = x \ (x > 0)$; ③ $\ln e^x = x \ (x \in \mathbb{R})$

④ $\ln(xy) = \ln x + \ln y$; ⑤ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$; ⑥ $\ln x^n = n \ln x$

⑦ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$; ⑧ $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$

مثال :

1) $\ln\sqrt{e} - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}\ln e + \ln e = \frac{1}{2} + 1 = \boxed{\frac{3}{2}}$

2) $e^{\ln 3 - \ln 5 + \ln 15} = e^{\ln\frac{3}{5} + \ln 15} = e^{\ln\left(\frac{3}{5}\times 15\right)} = e^{\ln 9} = \boxed{9}$

4. **نهايات الدالة اللوغاريتمية :**

① $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$; ② $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$; ③ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

④ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln x = 0$; ⑤ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; ⑥ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

مثال :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x - x = \lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln x - 1) = \boxed{+\infty}$

2) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1+\ln x \ \to -\infty}{x^2 \ \to 0^+} = \boxed{-\infty}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+3)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[x(x+\frac{3}{x})\right]}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\ln(x+\frac{3}{x})}{x}}_{\to 0} = \boxed{0}$

4) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln x^2 - x = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} 2\underbrace{x\ln x}_{\to 0} - x = \boxed{0}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{X}\ln(1+X) = \lim\limits_{X \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = \boxed{1}; \left(X = \frac{1}{x}\right)$

5. **اتجاه تغيّر الدالة اللوغاريتمية :**

الدالة اللوغاريتمية قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ، $[\ln u(x)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

الدالة اللوغاريتمية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، منه نستنتج أنّ :

- المعادلة $\ln u(x) = \ln v(x)$ تكافئ المعادلة $u(x) = v(x)$
- المتراجحة $\ln u(x) > \ln v(x)$ تكافئ المتراجحة $u(x) > v(x)$
- المتراجحة $\ln u(x) < \ln v(x)$ تكافئ المتراجحة $u(x) < v(x)$

مثال 1: حساب المشتقات

1) $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$; $f'(x) = \frac{2x+4}{x^2+4x-5}$

2) $f(x) = x\ln x - \ln(\ln x)$; $f'(x) = \ln x + \frac{x}{x} - \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x\ln x}$

3) $f(x) = x + \ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)$; $f'(x) = 1 + \frac{\frac{4}{(2x+1)^2}}{\frac{2x-1}{2x+1}} = 1 + \frac{4}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{4x^2+3}{4x^2-1}$

4) $f(x) = \sqrt{\ln x} + (\ln x)^2$; $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}} + \frac{2\ln x}{x} = \frac{\sqrt{\ln x}}{2x\ln x} + \frac{2\ln x}{x}$

مثال 2: حل المعادلات والمتراجحات

1) $\ln(2x-3) = \ln(x-3) + \ln 5$

$\begin{cases} 2x-3>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x>3 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{D} =]\boldsymbol{3}; +\infty[$

$\ln(2x-3) = \ln(x-3) + \ln 5 \Rightarrow \ln(2x-3) = \ln 5(x-3)$

$\Rightarrow 2x-3 = 5x-15 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$; $4 \in D \Rightarrow \boxed{S = \{4\}}$

2) $\ln(x^2-5) - \ln(4-x) = 2\ln 2$

$\begin{cases} x^2-5>0 \\ 4-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}; +\infty[\dots D_1 \\ x \in]-\infty; 4[\dots D_2 \end{cases} \Rightarrow x \in D_1 \cap D_2$

$\Rightarrow \boldsymbol{D} =]-\infty; -\sqrt{\boldsymbol{5}}[\cup]\sqrt{\boldsymbol{5}}; \boldsymbol{4}[$

$\ln(x^2-5) - \ln(4-x) = 2\ln 2 \Rightarrow \ln\frac{x^2-5}{4-x} = \ln 4 \Rightarrow \frac{x^2-5}{4-x} = 4$

$\Rightarrow x^2 - 5 = 16 - 4x \Rightarrow x^2 + 4x - 21 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+7) = 0$

$\Rightarrow x = 3$ أو $x = -7$; $\begin{cases} -7 \in D \\ 3 \in D \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \{-7; 3\}}$

3) $(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0$

$x > 0 \Rightarrow \boldsymbol{D} =]\boldsymbol{0}; +\infty[$; $\ln x = X$

$(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0 \Rightarrow X^2 - X - 6 = 0 \Rightarrow (X-3)(X+2) = 0$

$\Rightarrow X = 3$ أو $X = -2 \Rightarrow x = e^3$ أو $x = e^{-2}$; $\begin{cases} e^{-2} \in D \\ e^3 \in D \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \{e^{-2}; e^3\}}$

4) $\ln(2x+3) < 4$; $\boldsymbol{D} = \left]-\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{2}}; +\infty\right[$

$\ln(2x+3) < 4 \Rightarrow 2x + 3 < e^4 \Rightarrow x < \frac{e^4-3}{2} \Rightarrow \boxed{S = \left]-\frac{3}{2}; \frac{e^4-3}{2}\right[}$

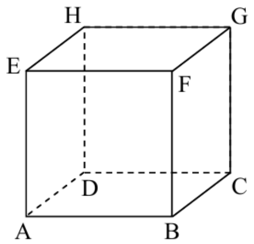
5) $(\ln x)^2 - 1 \leq 0$; $\boldsymbol{D} =]\boldsymbol{0}; +\infty[$

$(\ln x)^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow (\ln x - 1)(\ln x + 1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq \ln x \leq 1$

$\Rightarrow e^{-1} \leq x \leq e \Rightarrow \boxed{S = [e^{-1}; e]}$

قواعد أساسية في الهندسة الفضائية

تمرين شامل يلخص جميع قواعد الهندسة في الفضاء



الجزء الأول :

ABCDEFGH مكعب ضلعه a

1. احسب الجداء السلمي بدلالة a لكل من: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BF}$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH}$ ، $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DF}$ ، $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AG}$ ، $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{EG}$ ، $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{DF}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BF}=0(\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BF}$ لأنّ$)$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}\underbrace{=}_{\text{نسقط } G \text{ على } (ABD)}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}\underbrace{=}_{\text{مرتبطان خطيا وفي نفس الاتجاه}}a.a=a^2$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH}\underbrace{=}_{\text{نسقط } H \text{ على } (ABC)}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\underbrace{=}_{\text{مرتبطان خطيا ومتعكسان في الاتجاه}}-a.a=-a^2$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DF}\underbrace{=}_{\text{نسقط } F \text{ على } (ADC)}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}\underbrace{=}_{\text{متعامدان}}0$ (قطرا المربع متعامدان)

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AG}\underbrace{=}_{\text{نسقط } G \text{ على } (ABC)}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}=AC^2=2a^2\ (AC^2=AB^2+BC^2)$

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{EG}\underbrace{=}_{\text{نسقط } A \text{ على } (EFG)}\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{EG}=EG^2=2a^2\ (EG^2=EF^2+FG^2)$

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{DF}\underbrace{=}_{\text{علاقة شال}}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}).(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF})=\underbrace{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}}_{0(\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DB})}+\underbrace{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BF}}_{0(\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BF})}+\underbrace{\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{DB}}_{0(\overrightarrow{CG}\perp\overrightarrow{DB})}+\underbrace{\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{BF}}_{a^2(\overrightarrow{CG}\parallel\overrightarrow{BF})}=a^2$

ملاحظة هامة : طريقة الإسقاط تعتمد على اختيار مستوي يشمل ثلاث نقط من الأربعة المكوّنة للجداء السلمي واسقاط النقطة الرابعة على هذا المستوي. ولا يصح اسقاط نقطتين في آن واحد بل نستعمل علاقة شال ، ولو أسقطنا كلا من G و F على المستوي (ABC) في المثال الأخير لكانت النتيجة : $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=0$ وهذا خطأ

2. بيّن أنّ $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{EG}=0$ و $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{EB}=0$ ، ثمّ استنتج أنّ المستقيم (DF) عمودي على المستوي (BEG)

$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{EG}\underbrace{=}_{\text{نسقط } D \text{ على } (EFG)}\overrightarrow{HF}.\overrightarrow{EG}\underbrace{=}_{\text{متعامدان}}0$; $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{EB}\underbrace{=}_{\text{نسقط } D \text{ على } (EFB)}\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{EB}\underbrace{=}_{\text{متعامدان}}0$

بما أنّ $\overrightarrow{DF}$ عمودي على $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EB}$ وهما شعاعان غير مرتبطين خطيا من المستوي (BEG) ، استنتج أنّ المستقيم (DF) عمودي على المستوي (BEG)

3. عيّن طبيعة المثلث DBG واحسب مساحته. $(a=2cm)$

بما أنّ أضلاع المثلث DBG هي أوتار للمربعات المتقايسة $CDHG, BCGF, ABCD$ ، نستنتج أنّ: $DB=DG=BG$ ، منه المثلث DBG متقايس الأضلاع ومساحته هي : $S_{DBG}=\frac{DB\times GI}{2}$ ، حيث I هي المسقط العمودي للنقطة G على $[DB]$ (أي مركز المربّع $ABCD$).

$$DB^2=DA^2+AB^2=2a^2\Rightarrow DB=\sqrt{2}a=2\sqrt{2}\,cm$$

$$GI^2=GD^2-DI^2=GD^2-\left(\frac{1}{2}DB\right)^2=GD^2-\frac{1}{4}DB^2=DB^2-\frac{1}{4}DB^2=\frac{3}{4}DB^2=\frac{3}{4}(8)=6$$

$$GI=\sqrt{6}\Rightarrow\boxed{S_{DBG}=\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}{2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\,cm^2}$$

الجزء الثاني :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(1;0;-1)$ ، $B(2;2;3)$ ، $C(3;1;-2)$ ، $D(-4;2;1)$

1. بيّن أن النقط C,B,A تعين مستويا

لبيان أن النقط C,B,A تعيّن مستويا (أو أنّها في استقامية) ، نبيّن أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطّيا

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix};\frac{1}{2}\neq\frac{2}{1}\Rightarrow \text{غير مرتبطين خطيا } \overrightarrow{AC} \text{ و } \overrightarrow{AB} \Rightarrow \boxed{\text{النقط } C,B,A \text{ تعيّن مستويا}}$$

2. عيّن شعاعا ناظميا للمستوي (ABC)

ليكن $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) ، فهو إذن عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، منه :

$$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+2b+4c=0\ \dots ①\\ 2a+b-c=0\ \dots ②\end{cases}\xrightarrow[\text{في } ② \text{ نضرب المعادلة } -2]{}\begin{cases}a+2b+4c=0\\ -4a-2b+2c=0\end{cases}\xrightarrow[\text{نجمع المعادلتين}]{}-3a+6c=0$$

$$\Rightarrow a=2c\xrightarrow[② \text{ في المعادلة } a \text{ نعوّض}]{}4c+b-c=0\Rightarrow b=-3c\xrightarrow[c=1 \text{ من أجل}]{}\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}}$$

3. استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

إذا كان $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) ، فإنّ هذا الأخير يقبل معادلة من الشكل : $ax+by+cz+d=0$

طريقة أولى :

$$(ABC):2x-3y+z+d=0\,;A\in(ABC)\xrightarrow[(ABC) \text{ في معادلة } A \text{ نعوّض إحداثيات}]{}2-1+d=0\Rightarrow d=-1$$

$$\boxed{(ABC):2x-3y+z-1=0}$$

طريقة ثانية :

$$M(x;y;z)\in(ABC)\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0\Rightarrow 2(x-1)-3y+(z+1)=0\Rightarrow\boxed{2x-3y+z-1=0}$$

4. أثبت أن المثلث ABC قائم

لإثبات أن المثلث ABC قائم ، نستعمل الجداء السلمي أو النظرية العكسية لفيثاغورس

طريقة أولى :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1(2)+2(1)+4(-1)=2+2-4=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow\boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } A}$$

طريقة ثانية :

$$AB=\sqrt{1^2+2^2+4^2}=\sqrt{21};AC=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6};BC=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-5)^2}=\sqrt{27}$$

$$BC^2=AB^2+AC^2\Rightarrow\boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } A}$$

5. أحسب مساحة المثلث ABC

مساحة المثلث تساوي $\frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}$

$$S_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{\sqrt{1^2+2^2+4^2}\times\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}{2}=\frac{\sqrt{21}\times\sqrt{6}}{2}=\boxed{\frac{3}{2}\sqrt{14}\,u.a}$$

6. عيّن بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ، ثم احسب حجم رباعي الوجوه DABC

بُعد النقطة $M'(x';y';z')$ عن المستوي $(P):ax+by+cz+d=0$ هو : $\frac{|ax'+by'+cz'+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$d[D,(ABC)] = \frac{|2(-4) - 3(2) + 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \boxed{\sqrt{14}}$$

حجم رباعي الوجوه يساوي $\dfrac{\text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{3}$

$$V_{DABC} = \frac{1}{3} \underbrace{S}_{S_{ABC}} \times \underbrace{h}_{d[D,(ABC)]} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{14} \cdot \sqrt{14} = \frac{14}{2} = \boxed{7\ u.v}$$

7. عين ω مركز سطح الكرة (S) الذي معادلته $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z - 15 = 0$

لتعيين مركز ونصف قطر سطح كرة نكتب معادلته على الشكل : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z - 15 = 0 \Rightarrow x^2 + (y+1)^2 - 1^2 + (z-3)^2 - 3^2 - 15 = 0$$

$$x^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 25 \ \Rightarrow \boxed{\omega(0; -1; 3)\ ; r = \sqrt{25} = 5}$$

8. أحسب بعد النقطة ω عن المستوي (ABC)

$$d[\omega,(ABC)] = \frac{|2(0) - 3(-1) + 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{14}} = \boxed{\frac{5\sqrt{14}}{14}}$$

9. اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة ω و يعامد المستوي (ABC)

التمثيل الوسيطي لمستقيم يشمل نقطة $M_0(x_0; y_0; z_0)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ هو : $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t\ ; t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$

بما أنّ $(\Delta) \perp (ABC)$ ، فإنّ $\overrightarrow{u_{(\Delta)}} = \vec{n}$ ، أي إنّ الشعاع الناظمي للمستوي (ABC) هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

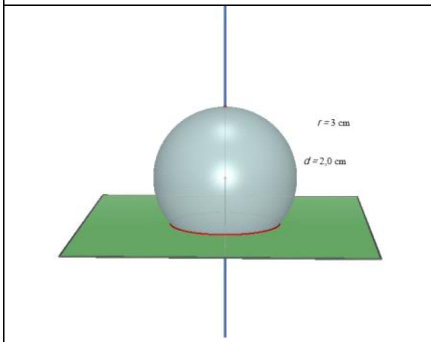
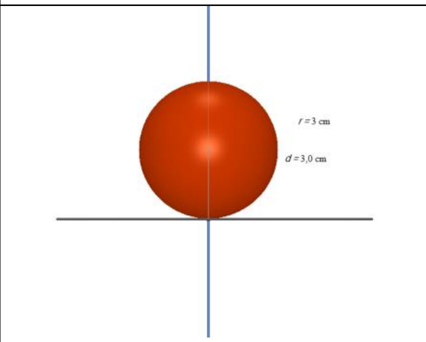
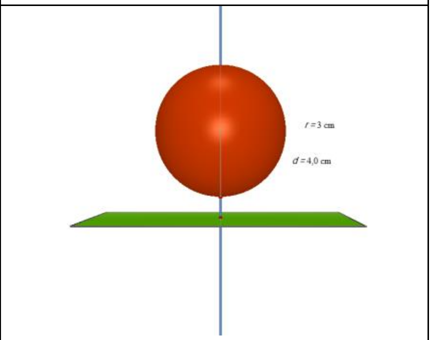
$$M(x; y; z) \in (\Delta) \Rightarrow \overrightarrow{\omega M} \parallel \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{\omega M} = t.\vec{n} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y + 1 = -3t \\ z - 3 = t \end{cases} \Rightarrow \boxed{(\Delta): \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 - 3t\ ; t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + t \end{cases}}$$

10. عيّن طبيعة و خصائص تقاطع المستوي (ABC) و سطح الكرة (S)

لتعيين طبيعة تقاطع مستوي (P) و سطح الكرة (S) مركزها ω ونصف قطرها r ، نقارن $d[\omega,(P)]$ و r :

- $d[\omega,(P)] > r \Rightarrow (P) \cap (S) = \emptyset$ (لا يتقاطعان)
- $d[\omega,(P)] = r \Rightarrow (P) \cap (S) = \{\omega'\}$ (يتماسّان في نقطة وحيدة)
- $d[\omega,(P)] < r \Rightarrow (P) \cap (S) = C_{(\omega';r')}$ (يتقاطعان وفق دائرة)

حيث ω' هي نقطة تعامد المستقيم الذي يشمل ω والمستوي (P) ، و r' يُعطى بالعلاقة : $r' = \sqrt{r^2 - d^2}$

الحالة الثالثة : $d[\omega,(P)] < r$	الحالة الثانية : $d[\omega,(P)] = r$	الحالة الأولى : $d[\omega,(P)] > r$
		
$(P) \cap (S) = C_{(\omega';r')}$	$(P) \cap (S) = \{\omega'\}$	$(P) \cap (S) = \emptyset$

بما أنّ $d[\omega,(ABC)] < r$ ، فإنّ المستوي (ABC) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة مركزها ω' ونصف قطرها r' حيث ω' هي نقطة تقاطع المستوي (ABC) والمستقيم (Δ) ، و $r' = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{25 - \frac{25}{14}}$ ، أي $\boxed{r' = \frac{5\sqrt{182}}{14}}$

لدراسة الوضع النسبي لمستقيم (Δ) ومستوي (P) ، نعوّض التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) في المعادلة الديكارتية للمستوي (P) فنحصل على معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهول t (الوسيط) ، ونميّز ثلاث حالات :

- **المعادلة لا تقبل حلولا ($0 =$ عدد) : المستقيم (Δ) يوازي المستوي (P)**
- **المعادلة تقبل حلا وحيدا ($t =$ عدد) : المستقيم (Δ) يقطع المستوي (P) في نقطة وحيدة**
- **المعادلة تقبل ما لا نهاية من الحلول ($0 = 0$) : المستقيم (Δ) مُحتوى في المستوي (P)**

لتعيين إحداثيات ω' نعوّض التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) في المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) :

$$2(2t) - 3(-1-3t) + 3 + t - 1 = 0 \Rightarrow 14t = -5 \Rightarrow t = -\frac{5}{14} \Rightarrow \boxed{\omega'\left(-\frac{5}{7};\frac{1}{14};\frac{37}{14}\right)}$$

11. ليكن (P) المستوي الذي معادلته: $x + y + z - 1 = 0$. بيّن أنّ المستويين (P) و (ABC) متعامدان

ليكن $\overrightarrow{n'}(1;1;1)$ شعاعا ناظميا للمستوي (P). لدينا :

$$\vec{n}.\overrightarrow{n'} = 2(1) - 3(1) + 1(1) = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{n'} \Rightarrow \boxed{(ABC) \perp (P)}$$

12. اعط التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ') تقاطع (P) و (ABC)

$$M(x;y;z) \in (\Delta') \Rightarrow \begin{cases} M \in (ABC) \\ M \in (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0 \ldots ① \\ x + y + z - 1 = 0 \ldots ② \end{cases} \xRightarrow[①-②]{} x - 4y = 0 \Rightarrow x = 4y$$

بتعويض x في المعادلة ② نجد : $4y + y + z - 1 = 0$ ، منه $z = -5y + 1$ ، وبوضع $y = t'$ نحصل على التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ').

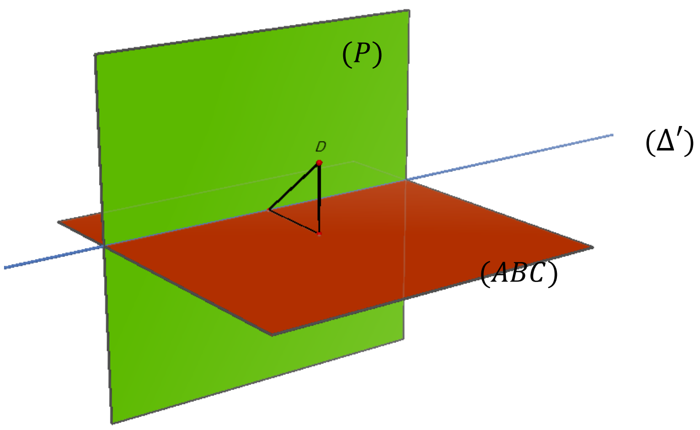
$$\boxed{(\Delta'): \begin{cases} x = 4t' \\ y = t' \\ z = 1 - 5t' \end{cases} ; t' \in \mathbb{R}}$$

13. عين بعد النقطة D عن المستوي (P) ، ثمّ استنتج المسافة بين D و (Δ')

$$d[D,(P)] = \frac{|1(-4) + 1(2) + 1(1) - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

بما أنّ المستويين (P) و (ABC) متعامدان ، فإنّ المسافات $d[D,(ABC)]$ ، $d[D,(P)]$ و $d[D,(\Delta')]$ هي أطوال أضلاع مثلث قائم طول وتره هو $d[D,(\Delta')]$.

$$d^2[D,(\Delta')] = d^2[D,(ABC)] + d^2[D,(P)] = 14 + \frac{4}{3} = \frac{46}{3} \Rightarrow d[D,(\Delta')] = \sqrt{\frac{46}{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{138}}{3}}$$



14. ادرس الوضع النسبي للمستقيمين (Δ) و (Δ')

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ شعاعي توجيه المستقيمين (Δ) و (Δ') على الترتيب.

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} ; \vec{u'}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix} ; \frac{2}{4} \neq -\frac{3}{1}$$

بما أنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ غير مرتبطين خطّيا ، فإنّ المستقيمين (Δ) و (Δ') متقاطعان أو لا ينتميان لنفس المستوي.

لتحديد الوضع النسبي للمستقيمين (Δ) و (Δ') ، نحلّ الجملة التالية حيث $M \in (\Delta)$ و $M' \in (\Delta')$:

$$\begin{cases} x_M = x_{M'} \\ y_M = y_{M'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t = 4t' \ldots ① \\ -1-3t = t' \ldots ② \end{cases} \xrightarrow[\text{نضرب المعادلة ② في } -4]{} \begin{cases} 2t = 4t' \\ 4+12t = -4t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2t' \\ 14t = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = -\frac{1}{7} \\ t = -\frac{2}{7} \end{cases}$$

بتعويض t و t' في التمثيلين الوسيطيين لـ (Δ) و (Δ') نحصل على النقطتين $\left(-\frac{4}{7};-\frac{1}{7};\frac{19}{7}\right)$ و $\left(-\frac{4}{7};-\frac{1}{7};\frac{12}{7}\right)$

بما أنّ $z_M \neq z_{M'}$ ، نستنتج أنّ المستقيمين (Δ) و (Δ') لا ينتميان إلى نفس المستوي.

15. اعط المعادلة الديكارتية لـ (Q) المستوي المحوري للقطعة [EF] حيث $E(1;0;0)$ و $F(-1;0;2)$

المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ هو المستوي الذي يعامد هذه القطعة في منتصفها ، فهو إذن يعامد $\overrightarrow{AB}$ ويشمل I منتصف $[AB]$

$$\overrightarrow{EF}(-2;0;2) ; I(0;0;1) ; M(x;y;z) \in (Q) \Rightarrow -2x+2z+d=0 ; I \in (Q) \Rightarrow 2+d=0$$

$$\Rightarrow d=-2 \Rightarrow \boxed{(Q): -2x+2z-2=0}$$

16. عيّن تقاطع المستويات الثلاث (P) ، (Q) و (ABC)

لتعيين تقاطع المستويات الثلاث (P) ، (Q) و (ABC) ، ندرس تقاطع المستوي (Q) والمستقيم (Δ')

$$M \in (Q) \cap \underbrace{(P) \cap (ABC)}_{(\Delta')} \Rightarrow M \in (Q) \cap (\Delta') ; -2(4t') + 2(1-5t') - 2 = 0 \Rightarrow -18t' = 0$$

$$\Rightarrow t' = 0 \xrightarrow[\text{نعوّض } t' \text{ في التمثيل الوسيطي لـ } (\Delta')]{} \boxed{(Q) \cap (P) \cap (ABC) = \{I(0;0;1)\}}$$

17. عيّن إحداثيات النقطتين G و 'G حيث G مركز ثقل المثلث ABC و 'G مرجح الجملة $\{(A;3),(B;-1);(C;1)\}$

إذا كان $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ ، فإنّ الجملة المثقلة $\{(A;\alpha),(B;\beta);(C;\gamma)\}$ تقبل مرجحا وحيدا G حيث :   • $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ • $G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma};\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma};\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$ • $\forall M ; \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$ • **مجموعة النقط M التي تحقّق : $\|\overrightarrow{MG}\|=0$ هي النقطة G**   • **مجموعة النقط M التي تحقّق : $\|\overrightarrow{MG}\|=k(k>0)$ هي سطح كرة مركزها G ونصف قطرها k**   • **مجموعة النقط M التي تحقّق : $\|\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{MG'}\|$ هي المستوي المحوري للقطعة $[GG']$**   • **مجموعة النقط M التي تحقّق : $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MG'}=0$ هي سطح كرة قطرها $[GG']$**   • **مجموعة النقط M التي تحقّق : $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{AB}=0$ هي المستوي الذي يشمل النقطة G ويعامد $\overrightarrow{AB}$**   • **مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1);(C;1)\}$ هو مركز ثقل المثلث ABC**   • **مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1)\}$ هو منتصف القطعة $[AB]$**   **إذا كان $\alpha+\beta+\gamma=0$ ، فإنّ الشعاع $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$ مستقل عن M**

$$G\{(A;1),(B;1);(C;1)\} \Rightarrow G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right) \Rightarrow \boxed{G(2;1;0)}$$

$$G'\{(A;3),(B;-1);(C;1)\} \Rightarrow G\left(\frac{3x_A - x_B + x_C}{3};\frac{3y_A - y_B + y_C}{3};\frac{3z_A - z_B + z_C}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{G'\left(\frac{4}{3};-\frac{1}{3};-\frac{8}{3}\right)}$$

18. عيّن في كل حالة من الحالات التالية مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

أ. $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = 6 \ldots ①$

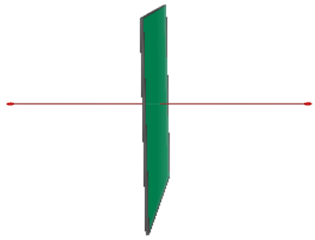
$$\|\underbrace{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}_{3\overrightarrow{MG}}\| = 6 \Rightarrow \|3\overrightarrow{MG}\| = 6 \Rightarrow 3\|\overrightarrow{MG}\| = 6 \Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{MG}\| = 2}$$

مجموعة النقط M التي تحقّق المعادلة ① هي سطح كرة مركزها G ونصف قطرها 2

ب. $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| \ldots ②$

$$\|\underbrace{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}_{3\overrightarrow{MG}}\| = \|\underbrace{3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}_{3\overrightarrow{MG'}}\| \Rightarrow \|3\overrightarrow{MG}\| = \|3\overrightarrow{MG'}\| = 6 \Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{MG'}\|}$$

مجموعة النقط M التي تحقّق المعادلة ② هي المستوي المحوري للقطعة $[GG']$



ج. $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\| \ldots ③$

$$\|\underbrace{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}_{3\overrightarrow{MG}}\| = \|\underbrace{2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}}_{\text{شعاع مستقل عن } M}\| \Rightarrow \|3\overrightarrow{MG}\| = \|2\overrightarrow{MA}-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})\|$$

$$\Rightarrow 3\|\overrightarrow{MG}\| = \|-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\| \Rightarrow 3\|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\|$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\| = 3\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{MG}\| = \sqrt{3}}$$

مجموعة النقط M التي تحقّق المعادلة ③ هي سطح كرة مركزها G ونصف قطرها $\sqrt{3}$

د. $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})(3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}) = 0 \ldots ④$

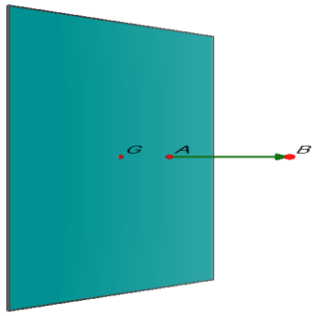
$$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})(3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}) = 0 \Rightarrow (3\overrightarrow{MG})(3\overrightarrow{MG'}) = 0 \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MG'} = 0}$$

مجموعة النقط M التي تحقّق المعادلة ④ هي سطح كرة قطرها $[GG']$

ه. $(3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}) = 0 \ldots ⑤$

$$(3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}) = 0 \xRightarrow[\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}]{} (3\overrightarrow{MG'})(-\overrightarrow{AB}) = 0 \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{MG'}.\overrightarrow{AB} = 0}$$

مجموعة النقط M التي تحقّق المعادلة ⑤ هي المستوي الذي يشمل النقطة G' ويعامد $\overrightarrow{AB}$



و. $MA^2+MB^2+MC^2=30 \dots ⑥$

$$MA^2+MB^2+MC^2=30 \Rightarrow \overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=30$$
$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2=30$$
$$\Rightarrow 3\overrightarrow{MG}^2+\overrightarrow{GA}^2+\overrightarrow{GB}^2+\overrightarrow{GC}^2+2\overrightarrow{MG}\left(\underbrace{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}\right)=30$$
$$\Rightarrow 3MG^2=30-GA^2-GB^2-GC^2$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{GA}(-1;-1;-1)\\ \overrightarrow{GB}(0;1;3)\\ \overrightarrow{GC}(1;0;-2)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}GA^2=(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2=3\\ GB^2=(1)^2+(3)^2=10\\ GC^2=(1)^2+(-2)^2=5\end{cases} \Rightarrow 3MG^2=12 \Rightarrow \boxed{MG^2=4}$$

مجموعة النقط M التي تحقّق المعادلة ⑥ هي سطح كرة مركزها G ونصف قطرها 2

19. ادرس الوضع النسبي لسطح الكرة (S) و المجموعة (أ) (السؤال السابق)

لدراسة الوضع النسبي لسطحي كرة (S) و(S') نقارن المسافة بين مركزيهما $d(\omega;\omega')$ مع مجموع نصفي قطريهما $r+r'$ • $d(\omega;\omega')>r+r'$: (S) و(S') **منفصلتان** • $d(\omega;\omega')=r+r'$: (S) و(S') **متماستان** • $d(\omega;\omega')<r+r'$: (S) و(S') **متقاطعتان**

لدينا : سطح الكرة (S) مركزها ω ونصف قطرها 5 ، و سطح الكرة (S') مركزها G ونصف قطرها 2 ، منه :

$$d(\omega;G)=\|\overrightarrow{\omega G}\|=\sqrt{2^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{17}\,;r+r'=7$$

بما أنّ $d(\omega;G)<r+r'$ ، فإنّ (S) و(S') متقاطعتان

20. بيّن أن مجموعة النقط $M(x\,;y\,;z)$ من الفضاء التي تحقق $(x+2y-z+3)^2+(3x+y+2z-1)^2=0$ هي مستقيم (D) يطلب تعيين شعاع توجيه له

المعادلة $x^2+y^2=0$ تكافئ $x=0$ و $y=0$

$$(x+2y-z+3)^2+(3x+y+2z-1)^2=0 \Rightarrow \begin{cases}x+2y-z+3=0\\3x+y+2z-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x+4y-2z+6=0 \dots ①\\ 3x+y+2z-1=0 \dots ②\end{cases}$$
$$\xrightarrow[①+②]{}\begin{cases}5x+5y+5=0\\3x+y+2z-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-y-1\\3(-y-1)+y+2z-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-y-1\\2z=2y+4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-y-1\\z=y+2\end{cases}$$

بوضع : $y=t$ ، نستنتج أنّ مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $(x+2y-z+3)^2+(3x+y+2z-1)^2=0$

هي المستقيم (D) المعرّف بتمثيله الوسيطي : $t\in\mathbb{R}$; $\begin{cases}x=-1-t\\y=t\\z=2+t\end{cases}$ والموجّه بالشعاع $\overrightarrow{u_{(D)}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

21. بين أن مجموعة النقط $M(x\,;y\,;z)$ من الفضاء التي تحقق $(x+2y-z+2)^2-(3x+y+2z-1)^2=0$ هي اتحاد مستويين (P') و (Q') يطلب إعطاء معادلتين ديكارتيتين لهما

$$(x+2y-z+2)^2-(3x+y+2z-1)^2=0$$
$$\Rightarrow [(x+2y-z+2)-(3x+y+2z-1)][(x+2y-z+2)+(3x+y+2z-1)]=0$$
$$\Rightarrow (-2x+y-3z+3)(4x+3y+z+1)=0$$
$$\Rightarrow -2x+y-3z+3=0 \dots (P') \text{ أو } 4x+3y+z+1=0 \dots (Q') \Rightarrow \boxed{M\in(P')\cup(Q')}$$

22. لتكن المستويات (π_m) المعرّفة بالمعادلة : $(2-m)x+y+mz+6m-6=0$ حيث $m\in\mathbb{R}$

أ. بيّن أنّ المستويات (π_m) تشمل مستقيما ثابتا (D') يُطلب تعيين معادلته الديكارتية وتمثيله الوسيطي

العبارة : من أجل كل $m\in\mathbb{R}$: $am+b=0$ تكافئ $a=0$ و $b=0$

$$\forall m\in\mathbb{R}:(2-m)x+y+mz+6m-6=0$$
$$\forall m\in\mathbb{R}:m(-x+z+6)+(2x+y-6)=0 \Rightarrow \boxed{(D'):\begin{cases}-x+z+6=0\\2x+y-6=0\end{cases}}$$

$$M \in (D') \Rightarrow \begin{cases} -x+z+6=0 \\ 2x+y-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z+6 \\ y=-2x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z+6 \\ y=-2z-6 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(D'): \begin{cases} x=6+t \\ y=-6-2t \ ; t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}}$$

ب. بيّن أنّ المستويات (π_m) تقطع المستوي (yOz) وفق مستقيم يُطلب تعيين تمثيله الوسيطي

$$\boxed{(\boldsymbol{yOz}) : \boldsymbol{x=0} \quad ; \quad (\boldsymbol{xOz}) : \boldsymbol{y=0} \quad ; \quad (\boldsymbol{xOy}) : \boldsymbol{z=0}}$$

$$M(x;y;z) \in (\pi_m) \cap (yOz) \Rightarrow \begin{cases} (2-m)x+y+mz+6m-6=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+mz+6m-6=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=0 \\ y=6-6m-mt' \ ; t' \in \mathbb{R} \\ z=t' \end{cases}}$$

ج. اكتب معادلة سطح الكرة $(S")$ التي مركزها $\omega"(2;1;2)$ ونصف قطرها 3

$$M(x;y;z) \in (S") \Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3^2 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0}$$

د. ناقش حسب قيم m الوضع النسبي للمستويات (π_m) بالنسبة إلى $(S")$ ثمّ استنتج المستويات المماسية لـ $(S")$

$$d[\omega",(\pi_m)] = \frac{|2(2-m)+1+2m+6m-6|}{\sqrt{(2-m)^2+1+m^2}} = \frac{|6m-1|}{\sqrt{2m^2-4m+5}} \ ; (2m^2-4m+5>0)$$

$$d[\omega",(\pi_m)]=3 \Rightarrow d^2[\omega",(\pi_m)]=9 \Rightarrow \frac{(6m-1)^2}{2m^2-4m+5}=9 \Rightarrow 9(2m^2-4m+5)=(6m-1)^2$$

$$\Rightarrow 18m^2+24m-44=0 \ ; \ m'=\frac{-2-\sqrt{26}}{3} \ ; \ m''=\frac{-2+\sqrt{26}}{3}$$

- $m \in \left]-\infty \ ; \frac{-2-\sqrt{26}}{3}\right[\cup \left]\frac{-2+\sqrt{26}}{3} \ ; +\infty\right[: \ d[\omega",(\pi_m)]>3 \Rightarrow$ المستويات (π_m) منفصلة عن $(S")$
- $m \in \left]\frac{-2-\sqrt{26}}{3} \ ; \frac{-2+\sqrt{26}}{3}\right[: \ d[\omega",(\pi_m)]<3 \Rightarrow$ المستويات (π_m) متقاطعة مع $(S")$
- $m \in \left\{\frac{-2-\sqrt{26}}{3} ; \frac{-2+\sqrt{26}}{3}\right\} : \ d[\omega",(\pi_m)]=3 \Rightarrow$ المستويات (π_m) مماسية لـ $(S")$

23. نعتبر النقطة $A(-1;1;3)$ والمستقيم (Δ) الممثل وسيطيا بالجملة : $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \ ; t \in \mathbb{R} \\ z=2+2t \end{cases}$

أ. لتكن M_t نقطة كيفية من المستقيم (Δ). عبّر عن AM_t^2 بدلالة t ، ثمّ احسب المسافة d

$$\overrightarrow{AM_t}\begin{pmatrix} 2+2t \\ 1-t \\ -1+2t \end{pmatrix} \Rightarrow AM_t^2 = (2+2t)^2+(1-t)^2+(-1+2t)^2 = \boxed{9t^2+2t+6}$$

حساب المسافة d

$$AM_t = \sqrt{9t^2+2t+6}$$

لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(t)=\sqrt{9t^2+2t+6}$. لدينا :

$$f'(t) = \frac{18t+2}{2\sqrt{9t^2+2t+6}} = \frac{9t+1}{\sqrt{9t^2+2t+6}} \ ; f'(t)=0 \Rightarrow 9t+1=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{9}$$

المسافة d هي القيمة الحدّية الصغرى للدالة $f(t)$ ، أي $f\left(-\frac{1}{9}\right)$ ، منه :

$$d = f\left(-\frac{1}{9}\right) = \sqrt{9\left(-\frac{1}{9}\right)^2+2\left(-\frac{1}{9}\right)+6} = \sqrt{\frac{1}{9}-\frac{2}{9}+\frac{54}{9}} = \sqrt{\frac{53}{9}} \Rightarrow \boxed{d=\frac{\sqrt{53}}{3}}$$

ب. عيّن إحداثيات المسقط العمودي H للنقطة A على المستقيم (Δ) ، ثمّ احسب المسافة d مرة ثانية

$$H \in (\Delta) \Rightarrow H(1+2t;2-t;2+2t) \Rightarrow \overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} 2+2t \\ 1-t \\ -1+2t \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AH} \perp (\Delta) \Rightarrow \overrightarrow{u_{(\Delta)}}.\overrightarrow{AH} = 0 \Rightarrow 2(2+2t) - (1-t) + 2(-1+2t) = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{9} \Rightarrow \boxed{H\left(\frac{7}{9};\frac{19}{9};\frac{16}{9}\right)}$$

حساب المسافة d

$$d = AH = \sqrt{\left(\frac{7}{9}+1\right)^2 + \left(\frac{19}{9}-1\right)^2 + \left(\frac{16}{9}-3\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 + \left(-\frac{11}{9}\right)^2} \Rightarrow \boxed{d = \frac{\sqrt{53}}{3}}$$

ج. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A ويعامد (Δ)

ليكن $\vec{n}$ شعاعا ناظميا للمستوي (P). لدينا : $\vec{n} = \overrightarrow{u_{(\Delta)}} \Rightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

$$M(x;y;z) \in (P) \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0 \Rightarrow 2(x+1) - (y-1) + 2(z-3) = 0 \Rightarrow \boxed{2x - y + 2z - 3 = 0}$$

- بيّن أنّ النقطة M_0 تنتمي إلى (Δ) ، ثمّ احسب AM_0^2

$M_0(1;2;2)$ هي النقطة من (Δ) من أجل $t = 0$

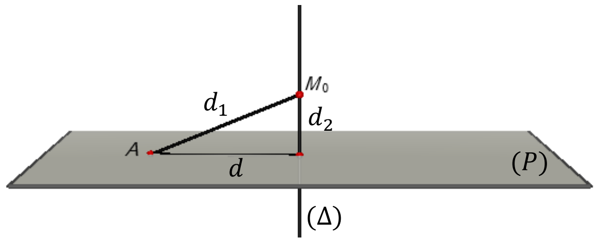
$$\overrightarrow{AM_0}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow AM_0^2 = (2)^2 + (1)^2 + (-1)^2 = \boxed{6}$$

- استنتج المسافة d مرة ثالثة

نسمي d_1 المسافة AM_0 و d_2 المسافة بين النقطة M_0 والمستوي (P). لدينا :

$$d_2 = \frac{|2(1) - 2 + 2(2) - 3|}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

$$d^2 = {d_1}^2 - {d_2}^2 = 6 - \frac{1}{9} = \frac{53}{9} \Rightarrow \boxed{d = \frac{\sqrt{53}}{3}}$$



24. من أجل كل عدد حقيقي α من المجال $]-\pi;\pi]$ ، نعتبر (S_α) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي إحداثياتها تحقق العلاقة : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x\cos\alpha - 2y\sin\alpha + 2z = 0$

أ. بيّن أنّ (S_α) سطح كرة يُطلب تعيين مركزها ω_α ونصف قطرها r

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x\cos\alpha - 2y\sin\alpha + 2z = 0$$
$$\Rightarrow (x-\cos\alpha)^2 - \cos^2\alpha + (y-\sin\alpha)^2 - \sin^2\alpha + (z+1)^2 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow (x-\cos\alpha)^2 + (y-\sin\alpha)^2 + (z+1)^2 = 2 \Rightarrow \omega_\alpha(\cos\alpha\,;\sin\alpha\,;-1)\,; r = \sqrt{2}$$

ب. عيّن حسب قيم α تقاطع سطح الكرة (S_α) والمستوي $(P")$ ذي المعادلة : $y - z + 2 = 0$

$$d[\omega_\alpha\,;(P")] = \frac{|\sin\alpha + 3|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha + 3)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha + 3) = \sqrt{2} \Rightarrow \sin\alpha = -1 \Rightarrow \sin\alpha = \sin\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\\ \alpha = \left(\pi - \frac{3\pi}{2}\right) + 2k\pi\end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{\pi}{2}}$$

- $\alpha = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha = -1 \Rightarrow d[\omega_\alpha\,;(P")] = r \Rightarrow$ (S_α) و $(P")$ متماسان
- $\alpha \in]-\pi;\pi] - \frac{\pi}{2} \Rightarrow sin\,\alpha > -1 \Rightarrow d[\omega_\alpha\,;(P")] > r \Rightarrow$ (S_α) و $(P")$ منفصلان

قواعد أساسية في الأعداد المركّبة والتحويلات النقطية

الشكل الجبري لعدد مركّب : $\boxed{z = x + iy}$

$Re(z) = x$(الجزء الحقيقي) ; $Im(z) = y$(الجزء التخيّلي) ; $i^2 = -1$

$z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; $z' = x' + iy'$; $z = z' \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

مرافق عدد مركّب : $\boxed{\bar{z} = x - iy}$

$z + \bar{z} = 2x$; $z.\bar{z} = x^2 + y^2$

$\bar{z} = z \Rightarrow$ حقيقي z ; $\bar{z} = -z \Rightarrow$ تخيّلي صرف z

طويلة عدد مركّب : $\boxed{r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$

$|\bar{z}| = |z|$; $|z|^2 = z.\bar{z}$; $|z.z'| = |z| \times |z'|$; $|z^n| = |z|^n$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

عمدة عدد مركّب : $\boxed{arg(z) = \theta + 2k\pi}$

$cos\,\theta = \frac{x}{r}$; $sin\,\theta = \frac{y}{r}$

$arg(\bar{z}) = -arg(z)$; $arg(z.z') = arg(z) + arg(z')$; $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')$

$arg(z^n) = n.arg(z)$

$arg(z) = k\pi \Rightarrow$ حقيقي z ; $arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$ تخيّلي صرف z

الشكل المثلّثي لعدد مركّب : $\boxed{z = r(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)}$

$z = x + iy = r\left(\frac{x}{r} + i\frac{y}{r}\right) = r(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)$; $(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)^n = cos\,(n\theta) + i\,sin\,(n\theta)$

الشكل الأسّي لعدد مركّب : $\boxed{z = re^{i\theta}}$

$\bar{z} = re^{-i\theta}$; $z.z' = r.r'e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$; $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n.e^{in\theta}$

$re^{i\frac{\pi}{2}} = i\,r$; $re^{i\pi} = -r$

التفسير الهندسي للأعداد المركّبة :

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$; $\|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$; $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$ ($[AB]$ منتصف I)

$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$ $(G\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma\})$

$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB}$; $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ حقيقي $\Rightarrow$ على استقامة واحدة C, B, A ; $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ تخيّلي صرف $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

مثال 1 :

C, B, A ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $z_A = 1$ ، $z_B = 2i$ و $z_C = -1 - i$

عيّن طويلة وعمدة العدد المركّب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{2i - 1}{-2 - i} = \frac{(-1 + 2i)(-2 + i)}{(-2 - i)(-2 + i)} = -\frac{5i}{5} = -i$$

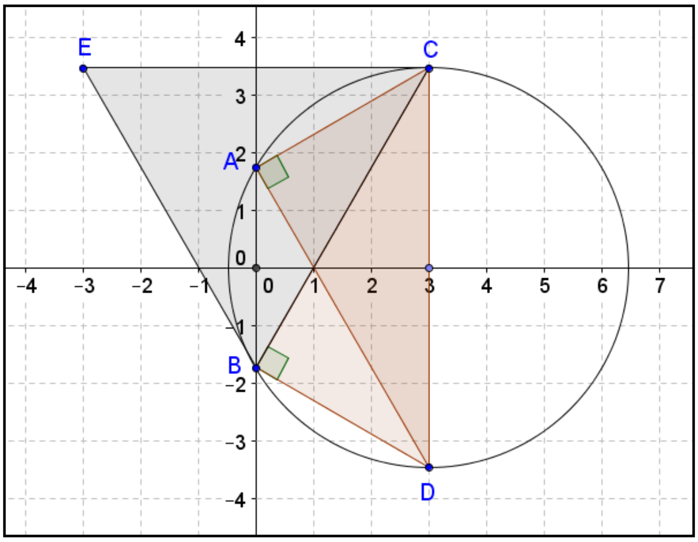
$$\begin{cases} \left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ متساوي الساقين و قائم في } A}$$

مثال 2 :

E, D, C, B, A نقط من المستوي لواحقها على الترتيب :

$$z_A = \sqrt{3}i\ ;\ z_B = -\sqrt{3}i\ ;\ z_C = 3 + 2\sqrt{3}i\ ;\ z_D = 3 - 2\sqrt{3}i\ ;\ z_E = -3 + 2\sqrt{3}i$$

مثِّل النقط A ، B ، C ، D ، E :



اثبت أنّ النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى دائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

$$\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{3 + \sqrt{3}i}{3 - 3\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}}{3}i = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \text{المثلث } ACD \text{ قائم في } A$$

$$\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = \frac{3 + 3\sqrt{3}i}{3 - \sqrt{3}i} = \sqrt{3}i = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \text{المثلث } BCD \text{ قائم في } B$$

بما أنّ المثلثين ACD و BCD قائمان ولهما نفس الوتر (CD) ، نستنتج أنّ النقط D, C, B, A تنتمي إلى الدائرة التي مركزها ω منتصف $[CD]$ ونصف قطرها $r = \frac{1}{2}CD$.

$$z_\omega = \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{3 + 2\sqrt{3}i + 3 - 2\sqrt{3}i}{2} = 3 \Rightarrow \boxed{\omega(3;0)}$$

$$r = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}|z_D - z_c| = \frac{1}{2}|3 - 2\sqrt{3}i - 3 - 2\sqrt{3}i| = \frac{1}{2}|-4\sqrt{3}i| = \frac{1}{2}(4\sqrt{3}) \Rightarrow \boxed{r = 2\sqrt{3}}$$

بيّن أنّ $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث BEC

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{3 + 3\sqrt{3}i}{-3 + 3\sqrt{3}i} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{-1 + \sqrt{3}i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \boxed{\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right) = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BE = BC \\ (\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BC}) = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } BEC \text{ متقايس الأضلاع}}$$

مثال 3 :

ليكن L عدد مركب حيث : $L = \frac{\bar{z}+2}{z+2}$ و z عدد مركب حيث z ≠ -2. و لتكن M صورة العدد المركب z في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

1. عيّن الجزء الحقيقي و التخيلي للعدد المركب L

$$L = \frac{\bar{z}+2}{z+2} = \frac{x - iy + 2}{x + iy + 2} = \frac{(x+2-iy)(x+2-iy)}{(x+2+iy)(x+2-iy)} = \frac{(x+2-iy)^2}{(x+2)^2+y^2} = \frac{(x+2)^2 - y^2 - 2iy(x+2)}{(x+2)^2+y^2}$$

$$\boxed{L = \frac{(x+2)^2 - y^2}{(x+2)^2+y^2} - \frac{2y(x+2)}{(x+2)^2+y^2} i}$$

2. عيّن مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون L حقيقيا

$$L \text{ حقيقي} \Rightarrow \begin{cases} 2y(x+2) = 0 \\ (x+2)^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \ldots (\Delta) \\ (x;y) \neq (-2;0) \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = -2 \ldots (\Delta') \\ (x;y) \neq (-2;0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{M \in (\Delta) \cup (\Delta') - \{(-2;0)\}}$$

3. عيّن مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون L تخيليا صرفا

$$L \text{ تخيلي صرف} \Rightarrow \begin{cases} (x+2)^2 - y^2 = 0 \\ (x+2)^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = (x+2)^2 \\ (x;y) \neq (-2;0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x+2 \ldots (D) \\ (x;y) \neq (-2;0) \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} y = -x-2 \ldots (D') \\ (x;y) \neq (-2;0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{M \in (D) \cup (D') - \{(-2;0)\}}$$

التحويلات النقطية :

$$\boldsymbol{M(z) \; ; \; M'(z') \; ; \; \omega(z_0) \; ; \; \vec{U}(b)}$$

العبارة المركّبة	التحويل النقطي
$\boldsymbol{T(M) = M' \Rightarrow z' = z + b}$	الانسحاب T الذي شعاعه $\vec{U}$
$\boldsymbol{h(M) = M' \Rightarrow z' - z_0 = k(z - z_0)}$	التحاكي h الذي مركزه ω و نسبته k
$\boldsymbol{R(M) = M' \Rightarrow z' - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0)}$	الدوران R الذي مركزه ω و زاويته θ
$\boldsymbol{S(M) = M' \Rightarrow z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)}$	التشابه المباشر S الذي مركزه ω ، نسبته k و زاويته θ

مثال : نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B لاحقتيهما على الترتيب : $z_A = 1 - 2i$ و $z_B = -3 + i$

1. عيّن النقطة C صورة النقطة B بالانسحاب T الذي شعاعه $\vec{U}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$$C = T(B) \Rightarrow z_C = z_B + z_{\vec{U}} = -3 + i + 2 + i \Rightarrow \boxed{z_C = -1 + 2i}$$

2. عيّن النقطة D صورة النقطة C بالتحاكي h الذي مركزه A و نسبته 2

$$D = h(C) \Rightarrow z_D - z_A = 2(z_C - z_A) \Rightarrow z_D = 2z_C - z_A = 2(-1+2i) - 1 + 2i \Rightarrow \boxed{z_D = -3 + 6i}$$

3. عيّن النقطة E صورة النقطة D بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$E = R(D) \Rightarrow z_E - z_O = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_D - z_O) \Rightarrow z_E = iz_D = -i(-3+6i) \Rightarrow \boxed{z_E = 6 + 3i}$$

4. عيّن النقطة F صورة النقطة E بالتشابه المباشر S الذي مركزه $\omega(2;1)$ ، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

$$F = S(E) \Rightarrow z_F - z_\omega = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_E - z_\omega) \Rightarrow z_F = \frac{1}{2}i(z_E - z_\omega) + z_\omega = \frac{1}{2}i(6 + 3i - 2 - i) + 2 + i$$

$$= \frac{1}{2}i(4 + 2i) + 2 + i = 2i - 1 + 2 + i \Rightarrow \boxed{z_F = 1 + 3i}$$

تعيين طبيعة التحويل النقطي المعرّف بعبارته المركّبة : $z' = az + b$ وذكر عناصره المميّزة

العناصر المميّزة للتحويل	طبيعة التحويل	a
$z_{\vec{U}} = b$	انسحاب شعاعه $\vec{U}$	$a = 1$
$z_\omega = \dfrac{b}{1-a}$; $k = a$	تحاكي مركزه ω ونسبته k	$a \in \mathbb{R} - \{1\}$
$z_\omega = \dfrac{b}{1-a}$; $\theta = \arg(a)$	دوران مركزه ω وزاويته θ	$a \in \mathbb{C}$; $\|a\| = 1$
$z_\omega = \dfrac{b}{1-a}$; $k = \|a\|$; $\theta = \arg(a)$	تشابه مباشر مركزه ω ، نسبته k وزاويته θ	$a \in \mathbb{C}$; $\|a\| \neq 1$

مثال : عيّن طبيعة التحويلات النقطية المعرّفة بالعبارات المركّبة التالية واذكر عناصرها المميّزة

.1 $\boldsymbol{z' = z + 2 - i}$

$a = 1$: التحويل هو انسحاب شعاعه $\vec{U}$ حيث $z_{\vec{U}} = 2 - i$ ، أي $\vec{U}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

.2 $\boldsymbol{z' = 2z + 1 + 3i}$

$a = 2$: التحويل هو تحاكي مركزه ω ونسبته 2 حيث : $z_\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1+3i}{1-2} = -1 - 3i$ ، أي $\omega(-1;-3)$

.3 $\boldsymbol{z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + 2i}$

$|a| = \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$: التحويل هو دوران مركزه ω حيث : $z_\omega = \frac{2i}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = -\sqrt{3} + i$ ، أي $\omega(-\sqrt{3};1)$ وزاويته

θ حيث : $\theta = \arg a = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ، $\left(\cos\theta = \frac{1}{2}\ ;\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

.4 $\boldsymbol{z' = 2iz + 1 - 2i}$

$|a| = |2i| = 2$: التحويل هو تشابه مباشر مركزه ω حيث : $z_\omega = \frac{1-2i}{1-2i} = 1$ ، أي $\omega(1;0)$ ، نسبته 2 $k = |a| = 2$

وزاويته θ حيث : $\theta = \arg a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، $(\cos\theta = 0\ ;\sin\theta = 1)$

العمليات على الشكل الجبري :

مثال 1 :

اكتب الأعداد المركّبة التالية على شكلها الجبري

- $z_1 = (2+i)^2 = 2^2 + i^2 + 4i = 4 - 1 + 4i = \boxed{3 + 4i}$
- $z_2 = (4+2i)(4-2i) = 4^2 - (2i)^2 = 16 - 4i^2 = 16 - 4(-1) = \boxed{20}$
- $z_3 = (2-i)^2(1+2i)^2 = [(2-i)(1+2i)]^2 = (2 + 4i - i - 2i^2)^2 = (4+3i)^2$
  $= 16 - 9 + 24i = \boxed{7 + 24i}$
- $z_4 = (3-2i)^3 = 3^3 - 3(3)^2(2i) + 3(3)(2i)^2 - (2i)^3 = 27 - 54i - 36 + 8i = \boxed{-9 - 46i}$
- $z_5 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$
  $= -\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i + \frac{9}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}i = \frac{8}{8} = \boxed{1}$
- $z_6 = \frac{4-6i}{3+2i} = \frac{(4-6i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{12-8i-18i-12}{3^2-(2i)^2} = \frac{-26i}{9+4} = \frac{-26i}{13} = \boxed{-2i}$
- $z_7 = \frac{1+i}{3-i\sqrt{2}} = \frac{(1+i)(3+i\sqrt{2})}{(3-i\sqrt{2})(3+i\sqrt{2})} = \frac{3+i\sqrt{2}+3i+i^2\sqrt{2}}{3^2-(i\sqrt{2})^2} = \frac{3-\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})i}{9+2} = \frac{3-\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})i}{11} = \boxed{\frac{3-\sqrt{2}}{11} + \frac{(3+\sqrt{2})}{11}i}$
- $z_8 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n} = \left[\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right]^{4n} = \left(\frac{1+i+i+i^2}{1-i^2}\right)^{4n} = \left(\frac{2i}{2}\right)^{4n} = (i)^{4n} = 1$
- $z_9 = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)}{(\cos\theta - i\sin\theta)} = \frac{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)}{(\cos\theta-i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)} = \frac{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)}{(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}$
  $= (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 + 2i\cos\theta\sin\theta = \boxed{\cos 2\theta + i\sin 2\theta}$

تعيين الجذرين التربيعيين لعدد مركب :

$\boldsymbol{z^2=8-6i}\,; z=x+iy\Rightarrow z^2=(x+iy)^2=\underbrace{x^2-y^2}_{8}+\underbrace{2xy}_{-6}i; |z^2|=x^2+y^2=\sqrt{8^2+6^2}=10$

$z^2=8-6i\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=10\\x^2-y^2=8\\2xy=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x^2=18\\xy=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=9\\y=-\dfrac{3}{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=-3\\y=1\end{cases}$

الجذرين التربيعيين للعدد $8-6i$ هما : $z_1=3-i$ و $z_2=-3+i$. $(z_1^2=z_2^2=8-6i)$

$\boldsymbol{z^2=-15+8i}\,; z=x+iy\Rightarrow z^2=(x+iy)^2=\underbrace{x^2-y^2}_{-15}+\underbrace{2xy}_{8}i;\ |z^2|=\sqrt{(-15)^2+8^2}=17$

$z^2=-15+8i\ \Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=17\\x^2-y^2=-15\\2xy=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x^2=2\\xy=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=1\\y=\dfrac{4}{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=-1\\y=-4\end{cases}$

الجذرين التربيعيين للعدد $-15+8i$ هما : $z_1=1+4i$ و $z_2=-1-4i$. $(z_1^2=z_2^2=-15+8i\,)$

حل معادلات من الدرجة الأولى :

$\boldsymbol{3z-2+i=(1+i)z-1-2i}\Rightarrow 3z-(1+i)z=-1-2i+2-i\Rightarrow(3-1-i)z=1-3i$

$\Rightarrow(2-i)z=1-3i\ \Rightarrow z=\dfrac{1-3i}{2-i}=\dfrac{(1-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{2+i-6i-3i^2}{2^2-i^2}=\dfrac{5-5i}{5}=\boxed{1-i}$

$\boldsymbol{(3-4i)z^2=iz}\ \Rightarrow(3-4i)z^2-iz=0\ \Rightarrow z[(3-4i)z-i]=0\Rightarrow z=0$ أو $(3-4i)z-i=0$

$(3-4i)z=i\ \Rightarrow z=\dfrac{i}{3-4i}=\dfrac{i(3+4i)}{25}=-\dfrac{4}{25}+\dfrac{3}{25}i\,;\boxed{S=\left\{0\,;\,-\dfrac{4}{25}+\dfrac{3}{25}i\right\}}$

$\boldsymbol{\dfrac{z+1}{z-1}=2i}\ \Rightarrow z+1=2i(z-1)\Rightarrow z-2iz=-1-2i\ \Rightarrow z(1-2i)=-1-2i\Rightarrow z=\dfrac{-1-2i}{1-2i}$

$z=\dfrac{(-1-2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\dfrac{-1-2i-2i+4}{5}=\dfrac{3-4i}{5}=\boxed{\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i}$

حل معادلات من الدرجة الثانية :

$\boldsymbol{z^2+2z+5=0}\,;\ \Delta=-16=(4i)^2\,;\ z_1=\dfrac{-2-4i}{2}=-1-2i\,;\ z_2=\dfrac{-2+4i}{2}=-1+2i$

$\boldsymbol{z^2-4\bar{z}-5=0}\Rightarrow(x+iy)^2-4(x-iy)-5=0\Rightarrow x^2-y^2+2ixy-4x+4iy-5=0$

$$\Rightarrow x^2-y^2-4x-5+2iy(x+2)=0\Rightarrow\begin{cases}x^2-y^2-4x-5=0\\2y(x+2)=0\end{cases}$$

- $y=0\Rightarrow x^2-4x-5=0\Rightarrow x=-1$ أو $x=5\Rightarrow z_1=-1\,;\ z_2=5$
- $x=-2\Rightarrow y^2=7\Rightarrow y=\sqrt{7}$ أو $y=-\sqrt{7}\Rightarrow z_3=-2+\sqrt{7}i\,;\ z_4=-2-\sqrt{7}i$

$$\boxed{S=\{-1\,;\,5\,;\,-2+\sqrt{7}i\,;\,-2-\sqrt{7}i\}}$$

الانتقال بين الأشكال الثلاثة (الجبري ، المثلّثي ، الأسّي) لعدد مركب :

مثال 1 :

$\boldsymbol{z_1=2+2i}\,;\ |z|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\,;\ \cos\theta=\dfrac{x}{|z|}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\ \sin\theta=\dfrac{y}{|z|}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\Rightarrow\boxed{z=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$

$$\boldsymbol{z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[cos\ \left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\ sin(-\frac{\pi}{6})\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right]\Rightarrow\boxed{z_2=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{z_3=4\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)}}_{\text{ليس شكلا مثلّثيا}}=4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\boxed{4e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

$$z_3=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\boxed{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{z_4=-3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}}_{\text{ليس شكلا مثلّثيا}}=3\left(-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=3\left[cos\ \left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\ sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=3\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=\boxed{3e^{i\frac{4\pi}{3}}};\ z_4=3\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\boxed{-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{z_5=\sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)}}_{\text{ليس شكلا مثلّثيا}}=\sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sqrt{5}\left(cos\ \frac{\pi}{3}+i\ sin\frac{\pi}{3}\right)=\boxed{\sqrt{5}e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

$$z_5=\sqrt{5}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}i}$$

طريقة ثانية لحساب $\boldsymbol{z_5}$:

$$\boldsymbol{z_5=\sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)}=\sqrt{5}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt{5}\left(cos\ \frac{\pi}{3}+i\ sin\frac{\pi}{3}\right)=\boxed{\sqrt{5}e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}i}$$

مثال 2 :

نعتبر العددين المركّبين z_1 و z_2 حيث : $z_1=-\sqrt{3}+i$ ، $z_2=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

اكتب $\boldsymbol{z_1}$ و $\boldsymbol{z_2}$ على الشكل الأسّي

$$\begin{cases}|z_1|=\sqrt{3+1}=2\\ \cos\theta_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \sin\theta_1=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|z_1|=2\\ \arg(z_1)=\frac{5\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow\boxed{z_1=2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

$$\begin{cases}|z_2|=\sqrt{2+2}=2\\ \cos\theta_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \sin\theta_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|z_2|=2\\ \arg(z_2)=-\frac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow\boxed{z_2=2e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

استنتج الطويلة وعمدة للعدد المركّب $\boldsymbol{L}$ حيث : $\boldsymbol{L=\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}}$

$$L=\frac{z_1}{z_2}\Rightarrow\begin{cases}|L|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\\ \arg(L)=\theta_1-\theta_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|L|=\frac{2}{2}\\ \arg(L)=\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}|L|=1\\ \arg(L)=\frac{13\pi}{12}\end{cases}}$$

اكتب العدد المركّب $\boldsymbol{L}$ على الشكل الجبري

$$L=\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}=\frac{(-\sqrt{3}+i)(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)}{(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)}\Rightarrow\boxed{L=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i}$$

استنتج قيمتي $\boldsymbol{\cos\frac{13\pi}{12}}$ و $\boldsymbol{\sin\frac{13\pi}{12}}$

$$L=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i=\cos\frac{13\pi}{12}+i\ \sin\frac{13\pi}{12}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}\cos\frac{13\pi}{12}=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{13\pi}{12}=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}}$$

قواعد أساسية في المتتاليات العددية

I- المتتالية الحسابية :

1. العلاقة التراجعية :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

2. عبارة الحد العام :

$$u_n = u_p + (n-p)r\ ;\ u_n = u_0 + nr\ ;\ u_n = u_1 + (n-1)r$$

3. الوسط الحسابي :

إذا كانت الأعداد c, b, a حدود متتابعة لمتتالية حسابية ، فإنّ : $a + c = 2b$

تنبيه : لحل مسائل الوسط الحسابي ، ننطلق دائما من معادلة المجموع $(a + b + c = \cdots)$ وتعويضها بالمعادلة $(3b = \cdots)$ لتعيين قيمة b ، ثمّ نعوّض b في معادلة الجداء $(a \times b \times c = \cdots)$ فنحصل على معادلة من الشكل $(a \times c = \cdots)$ ، ثمّ نكتب a و c بدلالة b و r ، فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول r من الشكل $[(b-r)(b+r) = \cdots]$ التي تكافئ $(b^2 - r^2 = \cdots)$ ، ونعيّن قيمتي r (الموجبة والسالبة) مع التركيز جيّدا على طبيعة المتتالية المعطاة في السؤال (متزايدة أم متناقصة) لمعرفة أي القيمتين نأخذ، ثمّ نحسب الحدّين a و c.

مثال 1 :

عيّن الحدود الثلاثة الأولى u_0 ، u_1 ، u_2 لمتتالية حسابية حيث : $\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 3 \\ u_0 \times u_1 \times u_2 = -24 \end{cases}$

$$u_0 + u_1 + u_2 = 3 \Rightarrow 3u_1 = 3 \Rightarrow \boxed{u_1 = 1}$$

$$u_0 \times \underbrace{u_1}_{=1} \times u_2 = -24 \Rightarrow \underbrace{u_0}_{u_1 - r} \times \underbrace{u_2}_{u_1 + r} = -24 \Rightarrow (1-r)(1+r) = -24 \Rightarrow 1 - r^2 = -24 \Rightarrow r^2 = 25$$

بما أنّ السؤال لم يحدّد طبيعة المتتالية (u_n) ، فإنّ $r = -5$ أو $r = 5$

- $r = -5 \Rightarrow u_0 = 1 - (-5) = 6\ ; u_2 = 1 + (-5) = -4 \Rightarrow \boxed{(u_0, u_1, u_2) = (6,1,-4)}$
- $r = 5 \Rightarrow u_0 = 1 - 5 = -4\ ; u_2 = 1 + 5 = 6 \Rightarrow \boxed{(u_0, u_1, u_2) = (-4,1,6)}$

التحقيق :

$$u_0 + u_1 + u_2 = 6 + 1 - 4 = \boxed{3}\ ;\ u_0 \times u_1 \times u_2 = 6 \times 1 \times (-4) = \boxed{-24}$$

مثال 2 :

عيّن الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 لمتتالية حسابية **متناقصة** حيث : $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 24 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210 \end{cases}$

$$u_1 + u_2 + u_3 = 24 \Rightarrow 3u_2 = 24 \Rightarrow \boxed{u_2 = 8}$$

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210 \Rightarrow u_1^2 + u_3^2 = 210 - 64 \Rightarrow (8-r)^2 + (8+r)^2 = 146 \Rightarrow r^2 = 9$$

بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة ، فإنّ $r = -3$ ، منه : $\boxed{u_1 = u_2 - r = 11}$ و $\boxed{u_3 = u_2 + r = 5}$

التحقيق :

$$u_1 + u_2 + u_3 = 11 + 8 + 5 = \boxed{24}\ ; 11^2 + 8^2 + 5^2 = 121 + 64 + 25 = \boxed{210}$$

4. حساب المجاميع :

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$$

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$$

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

مثال :

$$u_0 = 1\ ; r = 3\ ; S = u_0 + \cdots + u_9 = \frac{10}{2}\left(u_0 + \underbrace{u_9}_{u_0 + 9r}\right) = 5(1 + 28) = 5 \times 29 = 145$$

II- المتتالية الهندسية :

1. العلاقة التراجعية :

$$v_{n+1} = v_n \times q$$

2. عبارة الحد العام :

$$v_n = v_p \times q^{n-p}\ ;\ v_n = v_0 \times q^n\ ;\ v_n = v_1 \times q^{n-1}$$

3. الوسط الهندسي :

إذا كانت الأعداد c, b, a حدود متتابعة لمتتالية هندسية ، فإنّ : $a \times c = b^2$

تنبيه : لحل مسائل الوسط الهندسي ، ننطلق دائما من معادلة الجداء $(a \times b \times c = \cdots)$ وتعويضها بالمعادلة $(b^3 = \cdots)$ لتعيين قيمة b ، ثمّ نعوّض b في معادلة المجموع $(a + b + c = \cdots)$ فنحصل على معادلة من الشكل $(a + c = \cdots)$ ، ثمّ نكتب a و c بدلالة b و q ، فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول q من الشكل $\left[\frac{b}{q} + bq = \cdots\right]$ التي تكافئ $bq^2 - \cdots q + b = 0$ (نضرب طرفي المعادلة في q)، ونعيّن قيمتي q مع التركيز جيّدا على طبيعة المتتالية المعطاة في السؤال [رتيبة $(q > 0)$ ، غير رتيبة $(q < 0)$ ، متزايدة $(q > 1)$ ، متناقصة $(0 > q > 1)$] وإشارة حدودها لمعرفة أي القيمتين نأخذ، ثمّ نحسب الحدّين a و c.

مثال 1 :

عيّن الحدود v_1 ، v_2 ، v_3 لمتتالية هندسية **متزايدة ، حدودها موجبة** حيث : $\begin{cases} v_1 \times v_3 = 256 \\ v_1 + v_2 + v_3 = 56 \end{cases}$

$v_1 \times v_3 = 256 \Rightarrow v_2^2 = 256 \Rightarrow \boxed{v_2 = 16}$ (لأنّ حدود المتتالية (v_n) موجبة)

$$v_1 + \underbrace{v_2}_{16} + v_3 = 56 \Rightarrow \underbrace{v_1}_{\frac{u_2}{q}} + \underbrace{v_3}_{u_2.q} = 40 \Rightarrow \frac{16}{q} + 16q = 40 \Rightarrow 16q^2 - 40q + 16 = 0$$

$\Rightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{q = 2}$ (لأنّ المتتالية (v_n) متزايدة) $\Rightarrow \boxed{v_1 = \frac{v_2}{q} = 8\ ; v_3 = v_2.q = 32}$

التحقيق :

$$v_1 \times v_3 = 8 \times 32 = \boxed{256}\ ;\ v_1 + v_2 + v_3 = 8 + 16 + 32 = \boxed{56}$$

مثال 2 :

(v_n) متتالية هندسية حيث : $\begin{cases} v_1 \times v_5 = 16 \\ v_2 + v_3 + v_4 = 6 \end{cases}$

اثبت أنّ $v_1 \times v_5 = v_3^2$ ، ثمّ احسب الحدود $v_5\ , v_4\ , v_3\ , v_2\ , v_1$

$$v_1 \times v_5 = \frac{v_3}{q^2} \times v_3.q^2 = v_3^2$$

$v_1 \times v_5 = 16 \Rightarrow v_3^2 = 16 \Rightarrow v_3 = 4$ أو $v_3 = -4$

- $v_3 = 4:\ v_2 + v_3 + v_4 = 6 \Rightarrow v_2 + v_4 = 2 \Rightarrow \frac{v_3}{q} + v_3.q = 2 \Rightarrow \frac{4}{q} + 4q - 2 = 0$
  $\Rightarrow 4q^2 - 2q + 4 = 0 \Rightarrow 2q^2 - q + 2 = 0\ ;\ \Delta = -15$ (حالة مرفوضة)
- $v_3 = -4:\ v_2 + v_3 + v_4 = 6 \Rightarrow v_2 + v_4 = 10 \Rightarrow \frac{v_3}{q} + v_3.q = 10 \Rightarrow -\frac{4}{q} - 4q - 10 = 0$
  $\Rightarrow 4q^2 + 10q + 4 = 0 \Rightarrow 2q^2 + 5q + 2 = 0 \Rightarrow q = -\frac{1}{2}$ أو $q = -2$
  - ✓ $q = -\frac{1}{2} : v_1 = \frac{v_3}{q^2} = -16\ ;\ v_2 = \frac{v_3}{q} = 8\ ;\ v_3 = -4\ ;\ v_4 = v_3.q = 2\ ;\ v_5 = v_3.q^2 = -1$
  - ✓ $q = -2 : v_1 = \frac{v_3}{q^2} = -1\ ;\ v_2 = \frac{v_3}{q} = 2\ ;\ v_3 = -4\ ;\ v_4 = v_3.q = 8\ ;\ v_5 = v_3.q^2 = -16$

4. حساب المجاميع :

$$S_n = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right) = v_0\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)$$

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1}\right) = v_p\left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}\right)$$

$$v_1+\cdots+v_n=v_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)=v_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

5. **حساب الجداءات :**

$$P_n=v_0\times v_1\times\ldots\times v_n=v_0\times v_0.q\times v_0.q^2\times\ldots\times v_0.q^n=v_0^{n+1}.q^{1+2+\cdots+n}=v_0^{n+1}.q^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

III- المتتالية المشتملة على الدالة الأسّية أو اللوغاريتمية :

تنبيه : دراسة هذا النوع من المتتاليات يتطلب معرفة جيّدة بخواص الدالتين الأسّية واللوغاريتمية ، فراجعها.

مثال 1 :

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث :

$$\ln u_3+\ln u_4=5\ ;\ \ \ln u_3-\ln u_4=-1$$

1. عيّن أساس المتتالية (u_n) و حدها الأول u_1.
2. أكتب u_n بدلالة n ، ثم احسب الجداء : $P_n=u_1\times u_2\times\ldots\times u_n$.

(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n=\ln u_{n+1}-2\ln u_n$

3. أثبت أن (v_n) متتالية حسابية ، يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
4. احسب بدلالة n المجموع : $S_n=v_1+v_2+\cdots+v_n$.

1. **تعيين أساس المتتالية (u_n) و حدها الأول u_1**

$$\ln u_3-\ln u_4=-1\Rightarrow\ln\left(\frac{u_3}{u_4}\right)=-1\Rightarrow\frac{u_3}{u_4}=e^{-1}\Rightarrow\frac{u_4}{u_3}=e\Rightarrow\boxed{q=e}$$

$$\ln u_3+\ln u_4=5\Rightarrow\ln(u_1.e^2)+\ln(u_1.e^3)=5\Rightarrow\ln u_1+\ln e^2+\ln u_1+\ln e^3=5$$

$$\Rightarrow 2\ln u_1+5=5\Rightarrow 2\ln u_1=0\Rightarrow\boxed{u_1=1}$$

2. **كتابة u_n بدلالة n ، ثم حساب الجداء : $P_n=u_1\times u_2\times\ldots\times u_n$**

$$u_n=u_1.q^{n-1}\Rightarrow\boxed{u_n=e^{n-1}}$$

$$P_n=u_1\times u_2\times\ldots\times u_n=1\times e\times\ldots\times e^{n-1}=e^{1+2+\cdots+n-1}\Rightarrow\boxed{P_n=e^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

3. **اثبات أنّ (v_n) متتالية حسابية ، يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول**

$$v_{n+1}=\ln u_{n+2}-2\ln u_{n+1}=\ln(u_{n+1}.e)-2\ln(u_n.e)=\ln u_{n+1}+\ln e-2\ln u_n-2\ln e$$

$$=\ln u_{n+1}-2\ln u_n-1\Rightarrow\boxed{v_{n+1}=v_n-1}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r=-1$ وحدّها الأول $v_1=\ln u_2-2\ln u_1=\ln e-2\ln 1=1$

$$v_n=v_1+(n-1)r\Rightarrow\boxed{v_n=2-n}$$

4. **حساب بدلالة n المجموع : $S_n=v_1+v_2+\cdots+v_n$**

$$S_n=v_1+v_2+\cdots+v_n=\frac{n}{2}(v_1+v_n)=\frac{n}{2}(1+2-n)\Rightarrow\boxed{S_n=\frac{n}{2}(3-n)}$$

مثال 2 :

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث : $\begin{cases}u_1+u_3=30e\\ \ln(u_2)-\ln(u_4)+2\ln 3=0\end{cases}$

1. عيّن u_1 و q أساس المتتالية (u_n)
2. عبّر عن u_n بدلالة n
3. احسب بدلالة n المجموع : $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$
4. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\ln(u_{n+2})+\ln(u_{n+1})$
   أ. اكتب v_n بدلالة n ، ثمّ بيّن أنّ المتتالية (v_n) حسابية يُطلب تعيين حدها الأول وأساسها r
   ب. عيّن العدد الطبيعي n حيث : $v_0+v_1+\cdots+v_n=12+48\ln 3$.

1. تعيين u_1 و q أساس المتتالية (u_n)

$$\ln(u_2)-\ln(u_4)+2\ln 3=0 \Rightarrow \ln(u_4)-\ln(u_2)=2\ln 3 \Rightarrow \ln\left(\frac{u_4}{u_2}\right)=2\ln 3$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{u_2.q^2}{u_2}\right)=2\ln 3 \Rightarrow \ln q^2=2\ln 3 \Rightarrow 2\ln q=2\ln 3 \Rightarrow \boxed{q=3}$$

$$u_1+u_3=30e \Rightarrow u_1+u_1.q^2=30e \Rightarrow 10u_1=30e \Rightarrow \boxed{u_1=3e}$$

2. عبارة u_n بدلالة n

$$u_n=u_1.q^{n-1} \Rightarrow u_n=3e.3^{n-1} \Rightarrow \boxed{u_n=3^n.e}$$

3. حساب بدلالة n المجموع : $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=u_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right) \Rightarrow \boxed{S_n=\frac{3e}{2}(3^n-1)}$$

4. $v_n=\ln(u_{n+2})+\ln(u_{n+1})$

أ. كتابة v_n بدلالة n

$$v_n=\ln(u_{n+2})+\ln(u_{n+1})=\ln(3^{n+2}.e)+\ln(3^{n+1}.e)=\ln(3^{n+2})+\ln(e)+\ln(3^{n+1})+\ln(e)$$

$$v_n=(n+2)\ln 3+(n+1)\ln 3+2 \Rightarrow \boxed{v_n=(2n+3)\ln 3+2}$$

بيان أنّ المتتالية (v_n) حسابية يُطلب تعيين حدها الأول وأساسها r

$$v_{n+1}=(2n+5)\ln 3+2=(2n+3)\ln 3+2+2\ln 3=v_n+2\ln 3$$

منه ، نستنتج أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\boxed{r=2\ln 3}$ وحدها الأول $\boxed{v_0=3\ln 3+2}$

ب. تعيين العدد الطبيعي n حيث : $v_0+v_1+\cdots+v_n=12+48\ln 3$

$$v_0+v_1+\cdots+v_n=12+48\ln 3 \Rightarrow \frac{n+1}{2}(v_0+v_n)=12+48\ln 3$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2}[3\ln 3+2+(2n+3)\ln 3+2]=12+48\ln 3$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2}[2(n+3)\ln 3+4]=12+48\ln 3$$

$$\Rightarrow (n+1)[(n+3)\ln 3+2]=12+48\ln 3 \Rightarrow \begin{cases} 2(n+1)=12 \\ (n+1)(n+3)=48 \end{cases} \Rightarrow \boxed{n=5}$$

IV- دراسة تغيّرات متتالية وتقاربها :

لدراسة تغيّرات متتالية عددية ، نتبع إحدى الطرق التالية :

1. ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ ونستنتج ما يلي : $\begin{cases} u_{n+1}-u_n>0 \Rightarrow \text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة} \\ u_{n+1}-u_n<0 \Rightarrow \text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة} \\ u_{n+1}-u_n=0 \Rightarrow \text{المتتالية } (u_n) \text{ ثابتة} \end{cases}$
2. نقارن النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع 1 (لمّا $u_n>0$) ونستنتج ما يلي : $\begin{cases} \frac{u_{n+1}}{u_n}>1 \Rightarrow \text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة} \\ 0<\frac{u_{n+1}}{u_n}<1 \Rightarrow \text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة} \\ \frac{u_{n+1}}{u_n}=1 \Rightarrow \text{المتتالية } (u_n) \text{ ثابتة} \end{cases}$
3. ندرس تغيّرات الدالة $f(n)=u_n$ على المجال $[0;+\infty[$ ونستنتج تغيّرات المتتالية (u_n) (نفس التغيّرات)

لبيان أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ، نتبع إحدى الطرق التالية :

1. نبيّن أنّ $\lim_{n\to\infty} u_n=l$
2. نبيّن أنّ المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى $(u_n<M)$ ومتزايدة
3. نبيّن أنّ المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل $(u_n>m)$ ومتناقصة

جدول توضيحي يبيّن العلاقة بين أساس المتتالية وتغيّراتها

المتتالية الهندسية		المتتالية الحسابية	
المتتالية (v_n)	**الأساس q**	**المتتالية (u_n)**	**الأساس r**
متزايدة	$q > 1$	متزايدة	$r > 0$
متناقصة	$0 < q < 1$	متناقصة	$r < 0$
ثابتة	$q = 1$	ثابتة	$r = 0$
غير رتيبة	$q < 0$		

V- الاستدلال بالتراجع :

لبيان أنّ خاصية $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$ ، نستعمل الاستدلال بالتراجع باتباع الخطوات التالية :

1. **تحقيق التراجع :** نتحقق أنّ الخاصية $P(n)$ محققة من أجل $n = n_0$
2. **فرض التراجع :** نفرض أنّ الخاصية $P(n)$ محققة من أجل n
3. **برهان التراجع :** نبرهن أنّ الخاصية $P(n)$ محققة من أجل $n + 1$

مثال :

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = \alpha$ والعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n + 335$ ، حيث α عدد حقيقي

1. عيّن العدد الحقيقي α حيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة
2. نضع : $\alpha = 2009$
   - أ. برهن بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 2010$
   - ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$. ماذا تستنتج ؟

1. **تعيين العدد الحقيقي α حيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة**

المتتالية (u_n) ثابتة يعني $u_{n+1} = u_n = u_0 = \alpha$ ، منه $\alpha = \frac{5}{6}\alpha + 335$ أي $\alpha = 335 \times 6 = 2010$

2. $\boldsymbol{\alpha = 2009}$

أ. برهان بالتراجع أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 2010$

تحقيق التراجع : $u_0 \leq 2010$ (محقّقة لأنّ $u_0 = 2009$)

فرض التراجع : نفرض أنّ : $u_n \leq 2010$

برهان التراجع : نبرهن أنّ : $u_{n+1} \leq 2010$

$$u_n \leq 2010 \Rightarrow \frac{5}{6}u_n \leq \frac{5}{6}(2010) \Rightarrow \frac{5}{6}u_n \leq 1675 \Rightarrow \frac{5}{6}u_n + 335 \leq 2010 \Rightarrow u_{n+1} \leq 2010$$

ب. بيان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{6}u_n + 335 - u_n = 335 - \frac{1}{6}u_n = \frac{2010 - u_n}{6}$$

بما أنّ $u_n \leq 2010$ ، فإنّ $2010 - u_n \geq 0$ ، منه المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$

الاستنتاج : المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى ومتزايدة ، فهي إذن متقاربة.

قواعد أساسية في الدوال الأصلية والحساب التكاملي

I- الدوال الأصلية :

تعريف :

لتكن f دالة عددية معرّفة على مجال I. نقول إنّ الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على المجال I إذا تحقّق الشرطان التاليان :

- F قابلة للاشتقاق على المجال I
- من أجل كل $x \in I$: $F'(x) = f(x)$

خواص :

- كل دالة مستمرة على مجال تقبل دالة أصلية على هذا المجال
- إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I ، فإنّ جميع الدوال الأصلية للدالة f معرّفة على I بما يلي :
  $x \mapsto F(x) + k \,;\, k \in \mathbb{R}$
- توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقّق الشرط : $F(x_0) = y_0$ ، حيث $x_0 \in I$ و $y_0 \in \mathbb{R}$
- إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالتين f و g على الترتيب على المجال I ، فإنّ :
  - ✓ $F + G$ دالة أصلية للدالة $f + g$ على المجال I
  - ✓ kF دالة أصلية للدالة kf على المجال I

جدول الدوال الأصلية لبعض الدوال المألوفة :

المجال I	الدالة الأصلية $F(x)$	الدالة $f(x)$
$\mathbb{R}$	$c\,, c \in \mathbb{R}$	0
$\mathbb{R}$	$kx + c$	k
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{2}x^2 + c$	x
$\mathbb{R}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$x^n\,, n \neq -1$
$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$\frac{1}{x}$
$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$	$-\frac{1}{x} + c$	$\frac{1}{x^2}$
$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$\frac{1}{x^n}\,, n \neq 1$
$]0;+\infty[$	$2\sqrt{x} + c$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	$-\cos x + c$	$\sin x$
$\mathbb{R}$	$\sin x + c$	$\cos x$
$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$	$\tan x + c$	$1 + \tan^2 x$
$\mathbb{R}$	$e^x + c$	e^x

استعمال صيغ الاشتقاق لتحديد بعض الدوال الأصلية :

الدالة الأصلية $F(x)$	الدالة $f(x)$
$u+v+c$	$u'+v'$
$uv+c$	$u'v+uv'$
$\frac{u}{v}-c$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$	$u'.u^n$
$\ln\lvert u\rvert+c$	$\frac{u'}{u}$
$-\frac{1}{u}+c$	$\frac{u'}{u^2}$
$2\sqrt{u}+c$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$
e^u+c	$u'e^u$
$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	$\cos(ax+b)$
$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$	$\sin(ax+b)$

أمثلة على حساب الدوال الأصلية :

المجموعة الأولى :

1) $f(x)=2x+1 \Rightarrow \boxed{F(x)=x^2+x+c}$

2) $f(x)=10x^4+6x^3-1 \Rightarrow F(x)=10\left(\frac{x^5}{5}\right)+6\left(\frac{x^4}{4}\right)-x+c=\boxed{2x^5+\frac{3}{2}x^4-x+c}$

3) $f(x)=(x-1)(x+3)=x^2+2x-3 \Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+c}$

4) $f(x)=\frac{1}{x^2}-x^2 \Rightarrow \boxed{F(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{3}x^3+c}$

5) $f(x)=-\frac{4}{3x^5}=-\frac{4}{3}x^{-5} \Rightarrow F(x)=-\frac{4}{3}\left(\frac{x^{-4}}{-4}\right)+c=\boxed{\frac{1}{3x^4}+c}$

6) $f(x)=x+\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{1}{2}x^2+2\sqrt{x}+c}$

7) $f(x)=\sin x-2\cos x \Rightarrow \boxed{F(x)=-\cos x-2\sin x+c}$

المجموعة الثانية : من الشكل $u'.u^n$

1) $f(x)=\underbrace{3}_{u'}\underbrace{(3x+1)}_{u}{}^4 \Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{(3x+1)^5}{5}+c}$

2) $f(x)=16(4x-1)^3=4\times\underbrace{4}_{u'}\underbrace{(4x-1)}_{u}{}^3 \Rightarrow F(x)=4\frac{(4x-1)^4}{4}+c=\boxed{(4x-1)^4+c}$

3) $f(x)=(2x+7)^6=\frac{1}{2}\times\underbrace{2}_{u'}\underbrace{(2x+7)}_{u}{}^6 \Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{(2x+7)^7}{7}+c=\boxed{\frac{(2x+7)^7}{14}+c}$

4) $f(x) = \underbrace{(6x-2)}_{u'}\underbrace{(3x^2-2x+3)}_{u}{}^5 \Rightarrow \boxed{F(x) = \dfrac{(3x^2-2x+3)^6}{6} + c}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^4 = -\left[\underbrace{-\dfrac{1}{x^2}}_{u'}\underbrace{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}_{u}{}^4\right] \Rightarrow \boxed{F(x) = -\dfrac{1}{5}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^5 + c}$

6) $f(x) = \underbrace{\sin x}_{u}.\underbrace{\cos x}_{u'} \Rightarrow \boxed{F(x) = \dfrac{1}{2}\sin^2 x + c}$

المجموعة الثالثة : من الشكل $\dfrac{u'}{u^2}$

1) $f(x) = \dfrac{4}{(1+4x)^2} \begin{matrix}\to u' \\ \to u^2\end{matrix} \Rightarrow \boxed{F(x) = -\dfrac{1}{1+4x} + c}$

2) $f(x) = \dfrac{6}{(2x+1)^2} = 3\dfrac{2}{(2x+1)^2} \begin{matrix}\to u' \\ \to u^2\end{matrix} \Rightarrow \boxed{F(x) = -\dfrac{3}{2x+1} + c}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{(4x+3)^2} = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{4}{(4x+3)^2} \begin{matrix}\to u' \\ \to u^2\end{matrix} \Rightarrow \boxed{F(x) = -\dfrac{1}{4(4x+3)} + c}$

4) $f(x) = \dfrac{-1}{(2-x)^2} \begin{matrix}\to u' \\ \to u^2\end{matrix} \Rightarrow \boxed{F(x) = -\dfrac{1}{2-x} + c}$

5) $f(x) = \dfrac{2}{(4-3x)^2} = -\dfrac{2}{3}\times\dfrac{-3}{(4-3x)^2} \begin{matrix}\to u' \\ \to u^2\end{matrix} \Rightarrow F(x) = -\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{4-3x}\right) = \boxed{\dfrac{2}{3(4-3x)} + c}$

6) $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \begin{matrix}\to u' \\ \to u^2\end{matrix} \Rightarrow \boxed{F(x) = -\dfrac{1}{x^2+x+1} + c}$

7) $f(x) = \dfrac{4x-10}{(x^2-5x+6)^2} = 2\times\dfrac{2x-5}{(x^2-5x+6)^2} \begin{matrix}\to u' \\ \to u^2\end{matrix} \Rightarrow \boxed{F(x) = -\dfrac{2}{x^2-5x+6} + c}$

8) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} \begin{matrix}\to u' \\ \to u^2\end{matrix} \Rightarrow \boxed{F(x) = -\dfrac{1}{\sin x} + c}$

9) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = -\dfrac{-\sin x}{\cos^2 x} \begin{matrix}\to u' \\ \to u^2\end{matrix} \Rightarrow \boxed{F(x) = \dfrac{1}{\cos x} + c}$

المجموعة الرابعة : من الشكل $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$

1) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x+2}} \begin{matrix}\to u' \\ \to \sqrt{u}\end{matrix} \Rightarrow \boxed{F(x) = 2\sqrt{3x+2} + c}$

2) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2-5x}} = -\dfrac{2}{5}\times\dfrac{-5}{\sqrt{2-5x}} \begin{matrix}\to u' \\ \to \sqrt{u}\end{matrix} \Rightarrow F(x) = -\dfrac{2}{5}\times 2\sqrt{2-5x} + c = \boxed{-\dfrac{4}{5}\sqrt{2-5x} + c}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{2x-3}} \begin{matrix}\to u' \\ \to \sqrt{u}\end{matrix} \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2x-3} + c = \boxed{\sqrt{2x-3} + c}$

4) $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} \begin{matrix}\to u' \\ \to \sqrt{u}\end{matrix} \Rightarrow \boxed{F(x) = 2\sqrt{x^2+x+1} + c}$

5) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}} \begin{matrix}\to u' \\ \to \sqrt{u}\end{matrix} \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{x^2-1} + c = \boxed{\sqrt{x^2-1} + c}$

6) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}} \begin{matrix}\to u' \\ \to \sqrt{u}\end{matrix} \Rightarrow \boxed{F(x) = 2\sqrt{2+\sin x} + c}$

المجموعة الخامسة : من الشكل $\frac{u'}{u}$

1) $f(x)=x^2-5x+\frac{1}{x}\Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+\ln|x|+c}$

2) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}=x+1+\frac{1}{x}\Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x|+c}$

3) $f(x)=\frac{7}{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\Rightarrow \boxed{F(x)=7\ln|x|+10\sqrt{x}-\frac{1}{x}+c}$

4) $f(x)=\frac{3}{3x-4}\Rightarrow \boxed{F(x)=\ln|3x-4|+c}$

5) $f(x)=\frac{1}{x+1};I=]-\infty;-1[\ \Rightarrow F(x)=\ln\left|\underbrace{x+1}_{<0}\right|+c=\boxed{\ln(-x-1)+c}$

6) $f(x)=\frac{1}{x+1};I=]-1;+\infty[\ \Rightarrow F(x)=\ln\left|\underbrace{x+1}_{>0}\right|+c=\boxed{\ln(x+1)+c}$

7) $f(x)=\frac{2x}{x^2-4};I=]-\infty;-2[\Rightarrow F(x)=\ln\left|\underbrace{x^2-4}_{>0}\right|+c=\boxed{\ln(x^2-4)+c}$

8) $f(x)=\frac{1}{3x-5}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{3x-5};I=[2;+\infty[\Rightarrow F(x)=\frac{1}{3}\ln\left|\underbrace{3x-5}_{>0}\right|+c=\boxed{\frac{1}{3}\ln(3x-5)+c}$

9) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+2}=\frac{1}{2}\times\frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\underbrace{x^2+2x+2}_{>0}\right|+c$

$=\boxed{\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+c}$

10) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2-1};I=]-1;1[\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\underbrace{x^2-1}_{<0}\right|+c=\boxed{\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+c}$

11) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x};I=\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\ \Rightarrow F(x)=\ln\left|\underbrace{\sin x}_{>0}\right|+c=\boxed{\ln(\sin x)+c}$

12) $f(x)=\frac{1}{x\ln x}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x};I=]1;+\infty[\Rightarrow F(x)=\ln\left|\underbrace{\ln x}_{>0}\right|+c=\boxed{\ln(\ln x)+c}$

13) $f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{-\sin x}{\cos x};I=\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[\ \Rightarrow F(x)=-\ln\left|\underbrace{\cos x}_{<0}\right|+c=\boxed{-\ln(-\cos x)+c}$

المجموعة السادسة : من الشكل $u'.e^u$

1) $f(x)=\frac{1}{4}e^x\Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{1}{4}e^x+c}$

2) $f(x)=e^{-x}=-(-e^{-x})\Rightarrow \boxed{F(x)=-e^{-x}+c}$

3) $f(x)=e^{2x+3}=\frac{1}{2}(2e^{2x+3})\Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{1}{2}e^{2x+3}+c}$

4) $f(x)=xe^{x^2}=\frac{1}{2}(2xe^{x^2})\Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}+c}$

5) $f(x)=\frac{e^x\to u'}{e^x+1\to u}\Rightarrow F(x)=\ln\left|\underbrace{e^x+1}_{>0}\right|+c=\boxed{F(x)=\ln(e^x+1)+c}$

II- الحساب التكاملي :

1. تعريف :

لتكن f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$ و F دالة أصلية للدالة f على المجال $[a;b]$. تكامل الدالة f من a إلى b هو العدد الحقيقي :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

2. خواص التكامل :

- **الخطّية :**

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \ ; k \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

- **علاقة شال :**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

3. التكامل والترتيب :

$$\forall x \in [a;b]: f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$\forall x \in [a;b]: f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

4. القيمة المتوسطة :

- لتكن f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$. القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$ هي العدد الحقيقي :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

- إذا وُجد عددان حقيقيان m و M بحيث من أجل كل $x \in [a;b]$ ، $m \leq f(x) \leq M$ فإنّ :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

5. المكاملة بالتجزئة :

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال $[a;b]$ بحيث تكون f' و g' مستمرتين على المجال $[a;b]$

$$\int_a^b f'(x).g(x)dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b f(x).g'(x)dx$$

أمثلة على الحساب التكاملي :

1) $\int_0^3 (x-4)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 4x\right]_0^3 = \frac{9}{2} - 12 = \boxed{-\frac{15}{2}}$

2) $\int_1^2 \left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right)dx = \left[x^2 - x - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \left(4 - 2 - \frac{1}{2}\right) - (1 - 1 - 1) = \frac{3}{2} + 1 = \boxed{\frac{5}{2}}$

3) $\int_{-1}^1 \frac{2}{(2x+3)^2}dx = \left[-\frac{1}{2x+3}\right]_{-1}^1 = -\frac{1}{5} - (-1) = -\frac{1}{5} + 1 = \boxed{\frac{4}{5}}$ (من الشكل $\frac{u'}{u^2}$)

4) $\int_2^4 \frac{dx}{(4-3x)^2} = -\frac{1}{3}\int_2^4 \frac{-3}{(4-3x)^2}dx = -\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{4-3x}\right]_2^4 = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3x-4}\right]_2^4 = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{8}}$

5) $\int_1^{-1} \frac{dx}{\sqrt{4-2x}} = -\frac{1}{2}\int_1^{-1} \frac{-2}{\sqrt{4-2x}}dx = -\frac{1}{2}\left[2\sqrt{4-2x}\right]_1^{-1} = \left[\sqrt{4-2x}\right]_{-1}^{1} = \boxed{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$

6) $\int_0^2 \frac{dx}{x+1} = \left[\ln\left|\underbrace{x+1}_{>0}\right|\right]_0^2 = [\ln(x+1)]_0^2 = \ln 3 - \ln 1 = \boxed{\ln 3}$

7) $\int_{-4}^{-3} \frac{3}{x+2}dx = 3\int_{-4}^{-3} \frac{1}{x+2}dx = 3\left[\ln\left|\underbrace{x+2}_{<0}\right|\right]_{-4}^{-3} = 3[\ln(-x-2)]_{-4}^{-3} = 3(\ln 1 - \ln 2) = \boxed{-3\ln 2}$

8) $\int_1^2 \frac{x^2+x-2}{x^2}dx = \int_1^2 \left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx = \left[x+\ln|x|+\frac{2}{x}\right]_1^2 = 3+\ln 2-3 = \boxed{\ln 2}$

9) $\int_3^4 \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2-x}-\frac{4}{x+2}\right)dx = \left[\frac{1}{4}x - \ln|2-x| - 4\ln|x+2|\right]_3^4$

$= (1-\ln 2-4\ln 6) - \left(\frac{3}{4}-\ln 1-4\ln 5\right) = \boxed{\frac{1}{4}-\ln 2-4\ln 6+4\ln 5}$

10) $\int_2^5 -e^{-x}dx = [e^{-x}]_2^5 = \boxed{e^{-5}-e^{-2}}$

11) $\int_2^1 (e^{2x}+2e^x-3)dx = -\int_1^2 (e^{2x}+2e^x-3)dx = -\left[\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x-3x\right]_1^2$

$= -\left(\frac{1}{2}e^4+2e^2-6\right)+\left(\frac{1}{2}e^2+2e-3\right) = \boxed{-\frac{1}{2}e^4-\frac{3}{2}e^2+2e+3}$

12) $\int_{\ln 3}^{\ln 10} e^x(e^x-3)dx = \left[\frac{(e^x-3)^2}{2}\right]_{\ln 3}^{\ln 10} = \frac{49}{2}-0 = \boxed{\frac{49}{2}}$ (من الشكل $u'.u$)

13) $\int_0^1 \frac{e^{-x}-2}{e^x}dx = -\int_0^1 -e^{-x}(e^{-x}-2)dx = -\left[\frac{(e^{-x}-2)^2}{2}\right]_0^1 = \boxed{-\frac{(e^{-1}-2)^2}{2}+\frac{1}{2}}$

14) $\int_{-1}^0 \frac{\ln(1-x)}{x-1}dx = -\int_{-1}^0 \frac{1}{x-1}\ln(1-x)\,dx = -\left[\frac{\ln^2|1-x|}{2}\right]_{-1}^0 = 0+\frac{\ln^2(2)}{2} = \boxed{\frac{\ln^2(2)}{2}}$

15) $\int_0^3 |x-2|dx = \int_0^2 (-x+2)dx + \int_2^3 (x-2)dx = \left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2 + \left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^3$

$= 2+\left(-\frac{3}{2}+2\right) = \boxed{\frac{5}{2}}$

16) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \sin^2 x\,dx = \left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}{3} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

17) $\int_{-2}^0 (x+3)e^x dx\,;\, u = x+3 \Rightarrow u' = 1\,;\, v' = e^x \Rightarrow v = e^x$

$\int_{-2}^0 (x+3)e^x dx = [(x+3)e^x]_{-2}^0 - \int_{-2}^0 e^x dx = [(x+3)e^x]_{-2}^0 - [e^x]_{-2}^0 = [(x+2)e^x]_{-2}^0 = \boxed{2}$

18) $\int_0^\pi (x+1)\sin x\,dx\,;\, u = x+1 \Rightarrow u' = 1\,;\, v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$

$\int_0^\pi (x+1)\sin x\,dx = [-(x+1)\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos x\,dx = [-(x+1)\cos x]_0^\pi + [\sin x]_0^\pi$

$= \boxed{\pi+2}$

19) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx = \int_0^1 x(1-x)^{\frac{1}{2}}dx\,; u = x \Rightarrow u' = 1\,; v' = (1-x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx = \left[-\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \int_0^\pi -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}dx$$
$$= \left[-\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \left[\frac{4}{15}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \boxed{\frac{4}{15}}$$

20) $\int_1^2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx\,; u = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \Rightarrow u' = \frac{1}{x(x+1)}\,; v' = 1 \Rightarrow v = x$

$$\int_1^2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx = \left[x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x+1}dx = \left[x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^2 - [\ln|x+1|]_1^2$$
$$= 2\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} - \ln 3 + \ln 2 = 2\ln 2 - 2\ln 3 + 2\ln 2 - \ln 3 = \boxed{4\ln 2 - 3\ln 3}$$

21) $\int_{-1}^0 (2x^2+3x)e^{-x}dx\,; u_1 = 2x^2+3x \Rightarrow u_1' = 4x+3\,; v_1' = e^{-x} \Rightarrow v_1 = -e^{-x}$

$$\underbrace{\int_{-1}^0 (2x^2+3x)e^{-x}dx}_{I} = -[(2x^2+3x)e^{-x}]_{-1}^0 - \underbrace{\int_{-1}^0 -(4x+3)e^{-x}dx}_{J}$$

$u_2 = 4x+3 \Rightarrow u_2' = 4\,; v_2' = -e^{-x} \Rightarrow v_2 = e^{-x}$

$$J = [(4x+3)e^{-x}]_{-1}^0 - 4\int_{-1}^0 e^{-x}dx = [(4x+3)e^{-x}]_{-1}^0 + 4[e^{-x}]_{-1}^0 = 7 - 3e$$
$$I = -[(2x^2+3x)e^{-x}]_{-1}^0 - (7-3e) = -e - 7 + 3e = \boxed{2e-7}$$

22) $\int_1^e (\ln x)^2 dx\,; u_1 = (\ln x)^2 \Rightarrow u_1' = \frac{2\ln x}{x}\,; v_1' = 1 \Rightarrow v_1 = x$

$$\underbrace{\int_1^e (\ln x)^2 dx}_{I} = [x(\ln x)^2]_1^e - 2\underbrace{\int_1^e \ln x\, dx}_{J}$$

$u_2 = \ln x \Rightarrow u_2' = \frac{1}{x}\,; v_2' = 1 \Rightarrow v_2 = x$

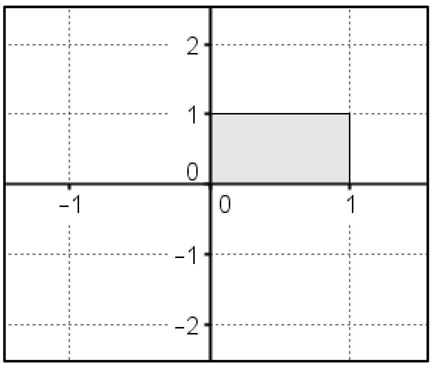
$$J = [x\ln x]_1^e - \int_1^e dx = [x\ln x]_1^e - [x]_1^e = e - (e-1) = 1$$
$$I = [x(\ln x)^2]_1^e - 2 = \boxed{e-2}$$

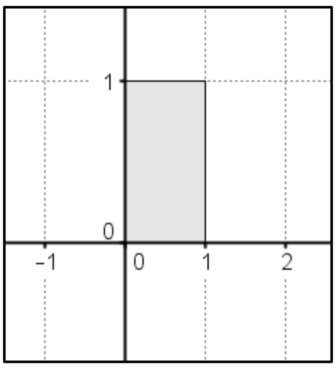
III- حساب المساحات :

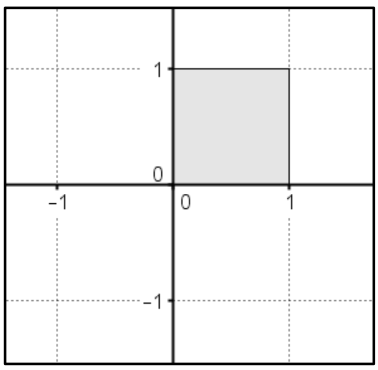
1. وحدة المساحة :

وحدة المساحة في مستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ هي مساحة الرباعي المحدّد بالنقطة O والشعاعين $\vec{i}$ و $\vec{j}$

$$1u.A = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$







2. **حساب مساحة حيّز :**

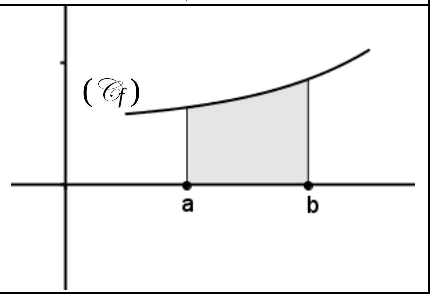
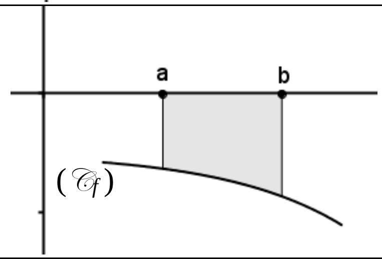
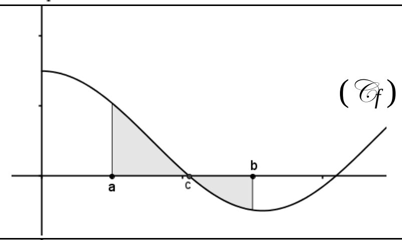
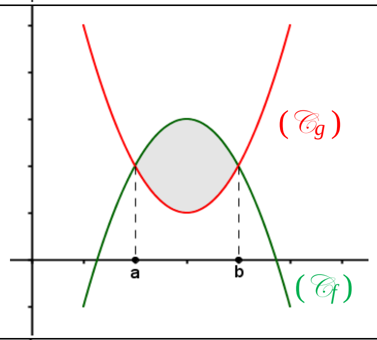
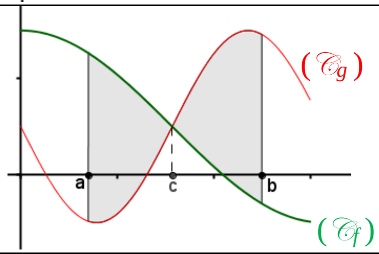
- لتكن f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$. مساحة الحيّز المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C}_f)$، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=a$ و $x=b$ هي :

$$\left(\int_a^b |f(x)|dx\right)u.A$$

- لتكن f و g دالتين مستمرتين على مجال $[a;b]$. مساحة الحيّز المحصور بين المنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ ، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=a$ و $x=b$ هي :

$$\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\right)u.A$$

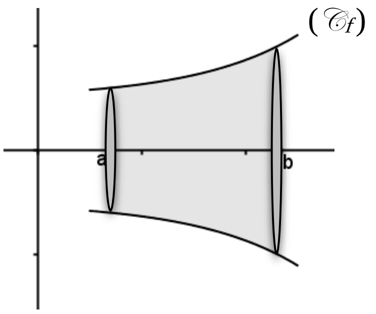
3. **حالات خاصة :**

الرسم	ملاحظات	مساحة الحيّز الرمادي في الرسم
	f موجبة على المجال $[a;b]$	$\left(\int_a^b f(x)dx\right)u.A$
	f سالبة على المجال $[a;b]$	$\left(\int_a^b -f(x)dx\right)u.A$
	f موجبة على المجال $[a;c]$ وسالبة على المجال $[c;b]$	$\left(\int_a^c f(x)dx+\int_c^b -f(x)dx\right)u.A$
	$(\mathscr{C}_f)$ فوق $(\mathscr{C}_g)$ على المجال $[a;b]$	$\left(\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right)u.A$
	$(\mathscr{C}_f)$ فوق $(\mathscr{C}_g)$ على المجال $[a;c]$ و$(\mathscr{C}_f)$ تحت $(\mathscr{C}_g)$ على المجال $[c;b]$	$\left(\int_a^c [f(x)-g(x)]dx + \int_c^b [g(x)-f(x)]dx\right)u.A$

4. حساب الحجوم :

حجم المجسّم المولّد بدوران المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ حول محور الفواصل دورة كاملة في مجال $[a;b]$ هو :

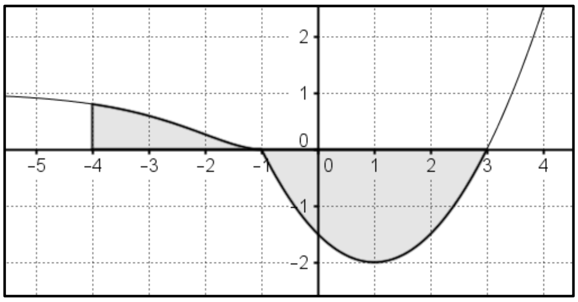
$$V = \left[\int_a^b \pi\big(f(x)\big)^2 dx\right] u.v$$



مثال على حساب المساحات :

لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{2} \ ; x \geq -1 \\ xe^{x+1} + 1 \ ; x \leq -1 \end{cases}$ وليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني المبيّن أسفله.

احسب مساحة الحيّز المظلل في الشكل.



$$A = \underbrace{\int_{-4}^{-1}(xe^{x+1}+1)dx}_{I} - \underbrace{\int_{-1}^{3}\left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}\right)dx}_{J}$$

$$I = \int_{-4}^{-1}(xe^{x+1}+1)dx = \int_{-4}^{-1}xe^{x+1}dx + \int_{-4}^{-1}dx \ ; \ u = x \Rightarrow u' = 1 \ ; \ v' = e^{x+1} \Rightarrow v = e^{x+1}$$

$$I = [xe^{x+1}]_{-4}^{-1} - \int_{-4}^{-1}e^{x+1}dx + [x]_{-4}^{-1} = [xe^{x+1}]_{-4}^{-1} - [e^{x+1}]_{-4}^{-1} + [x]_{-4}^{-1} = [(x-1)e^{x+1} + x]_{-4}^{-1}$$

$$= 5e^{-3} + 1$$

$$J = \int_{-1}^{3}\left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}\right)dx = \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x\right]_{-1}^{3} = -\frac{16}{3}$$

$$A = I - J = 5e^{-3} + 1 + \frac{16}{3} = \boxed{5e^{-3} + \frac{19}{3} \ u.a}$$

قواعد أساسية في الحساب

1- إيجاد القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر :

لإيجاد القيم الممكنة لـ $d = PGCD(a;b)$ ، نبحث عن علاقة بين a و b مستقلة عن n

<u>مثال 1:</u> $b = 5n - 2 \,; a = 2n + 3$

$d = PGCD(a;b)$ يعني d يقسم a و d يقسم b ، منه d يقسم $5a - 2b$ أي d يقسم 19

فالقيم الممكنة لـ d هي قواسم 19 أي 1 و 19.

<u>مثال 2:</u> $b = n^2 + 2 \,; a = 5n^2 + 7$

$d = PGCD(a;b)$ يعني d يقسم a و d يقسم b ، منه d يقسم $-a + 5b$ أي d يقسم 3

فالقيم الممكنة لـ d هي قواسم 3 أي 1 و 3.

2- إيجاد قيم n التي من أجلها يأخذ d قيمة معيّنة:

لإيجاد قيم n التي من أجلها يأخذ d قيمة معيّنة (غالبا القيمة المختلفة عن 1) نستعمل الموافقات على النحو التالي:

<u>مثال 1 (السابق):</u> $b = 5n - 2 \,; a = 2n + 3$ ، $d = 1$ أو $d = 19$

نبحث عن قيم n التي من أجلها $d = 19$:

$d = 19$ يعني أنّ a و b من مضاعفات 19 أي :

$$d = 19 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[19] \\ b \equiv 0[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n + 3 \equiv 0[19] \\ 5n - 2 \equiv 0[19] \end{cases} \xrightarrow[\text{نطرح الموافقتين}]{} 3n - 5 \equiv 0[19] \Rightarrow 3n \equiv 5[19]$$

لإيجاد قيم n التي تحقق الموافقة السابقة نستعمل إحدى الطريقتين :

<u>الطريقة الأولى : الجدول</u>

نعطي لـ n القيم من 0 إلى 18 (الترديد -1) ، ثمّ نضرب هذه القيم في 3 وكلّما زاد العدد عن الترديد (أو أحد مضاعفاته) نطرح منه الترديد (أو أحد مضاعفاته)

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9
$3n \equiv$	0	3	6	9	12	15	18	2	**5**	8
$n \equiv$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	[19]
$3n \equiv$	11	14	17	1	4	7	10	13	16	

$$3n \equiv 5[19] \Rightarrow n \equiv 8[19] \Rightarrow \boxed{n = 19k + 8 \,; k \in \mathbb{N}}$$

<u>الطريقة الثانية : إضافة الترديد إلى الطرف الثاني حتى يقبل القسمة على الطرف الأول</u>

$$3n \equiv 5[19] \Rightarrow 3n \equiv 5 + 19[19] \Rightarrow 3n \equiv 24[19] \Rightarrow n \equiv 8[19] \Rightarrow n = 19k + 8 \,; k \in \mathbb{N}$$

ملاحظة هامة : تستعمل هذه الطريقة فقط إذا كان الطرف الأول أولي مع الترديد (3 مع 19)

<u>مثال 2 (السابق):</u> $b = n^2 + 2 \,; a = 5n^2 + 7$ ، $d = 1$ أو $d = 3$

نبحث عن قيم n التي من أجلها $d = 3$:

$d = 3$ يعني أنّ a و b من مضاعفات 3 أي :

$$\begin{cases} a \equiv 0[3] \\ b \equiv 0[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5n^2 + 7 \equiv 0[3] \\ n^2 + 2 \equiv 0[3] \end{cases} \xrightarrow[\text{نطرح الموافقتين}]{} \underbrace{4}_{\equiv 1[3]} n^2 + \underbrace{5}_{\equiv 2[3]} \equiv 0[3]$$

$$\Rightarrow n^2 + 2 \equiv 0[3] \Rightarrow n^2 \equiv -2[3] \xrightarrow[\text{نضيف الترديد}]{} \boxed{n^2 \equiv 1[3]}$$

لإيجاد قيم n التي تحقق الموافقة السابقة نستعمل إحدى الطريقتين السابقتين بالإضافة إلى طريقة ثالثة عندما يكون n من الدرجة الثانية **<u>والترديد أوليا</u>** :

<u>ط1: الجدول</u>

$n \equiv$	0	1	2	[3]
$n^2 \equiv$	0	1	1	[3]

$n^2 \equiv 1[3] \Rightarrow n \equiv 1[3]$ أو $n \equiv 2[3]$

$\Rightarrow \boxed{n = 3k + 1 \text{ أو } n = 3k + 2 \,; k \in \mathbb{N}}$

ط2: إضافة الترديد حتى نحصل على مربع تام

$n^2 \equiv 1[3] \Rightarrow n^2 \equiv 4[3] \Rightarrow n \equiv 2[3]$ أو $n \equiv -2[3] \Rightarrow \boxed{n \equiv 2[3] \text{ أو } n \equiv 1[3]}$

ط3: استعمال المتطابقات الشهيرة

$n^2 \equiv 1[3] \Rightarrow n^2 - 1 \equiv 0[3] \Rightarrow (n-1)(n+1) \equiv 0[3]$

$\Rightarrow n - 1 \equiv 0[3]$ أو $n + 1 \equiv 0[3]$

$\Rightarrow n \equiv 1[3]$ أو $n \equiv -1[3] \Rightarrow \boxed{n \equiv 1[3] \text{ أو } n \equiv 2[3]}$

3- إيجاد قيم n لمّا يكون الترديد مجهولا :

لإيجاد قيم n لمّا يكون الترديد مجهولا نكتب الموافقة عل الشكل : $\boxed{\text{عدد} \equiv 0[\text{الترديد}]}$

مثال1: $n + 9 \equiv 0[n+1]$

$n + 9 \equiv 0[n+1] \Rightarrow n + 9 \equiv n + 1[n+1] \Rightarrow (n+9) - (n+1) \equiv 0[n+1]$

$\Rightarrow 8 \equiv 0[n+1] \Rightarrow (n+1)$ مضاعف لـ $8 \Rightarrow 8$ قاسم لـ $(n+1)$

$(n+1) \in D_8 \Rightarrow (n+1) \in \{1; 2; 4; 8\} \Rightarrow \boxed{n \in \{0; 1; 3; 7\}}$

ملاحظة هامة : لتحديد القواسم ينبغي دائما التأكّد من السؤال إن كان المجهول طبيعيا أم صحيحا، فإن كان المجهول طبيعيا نكتفي بالقواسم الطبيعية ($D_8 = \{1; 2; 4; 8\}$) ، أمّا إن كان المجهول صحيحا نأخذ القواسم الصحيحة ($D_8 = \{-8; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 8\}$)

مثال2: $n^2 + 3n + 8 \equiv 0[n+1]$

$n^2 + 3n + 8 \equiv 0[n+1] \Rightarrow n^2 + 3n + 8 \equiv (n+1)^2 + (n+1)[n+1]$

$\Rightarrow n^2 + 3n + 8 \equiv n^2 + 3n + 2[n+1] \Rightarrow 6 \equiv 0[n+1] \Rightarrow (n+1) \mid 6 \Rightarrow (n+1) \in \{1; 2; 3; 6\}$

$\Rightarrow \boxed{n \in \{0; 1; 2; 5\}}$

طريقة ثانية: $n^2 + 3n + 8 = (n+1)(n+2) + 6$;

$n^2 + 3n + 8 \equiv 0[n+1] \Rightarrow 6 \equiv 0[n+1] \Rightarrow (n+1) \mid 6$

$\Rightarrow (n+1) \in \{1; 2; 3; 6\} \Rightarrow \boxed{n \in \{0; 1; 2; 5\}}$

4- إيجاد باقي قسمة عدد طبيعي على آخر:

بواقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي a^n على b تكون دورية، أي أنها تتكرر من أجل قيم معيّنة للعدد n، وبما أنّ باقي a^0 على b يكون دائما 1 ، نحسب بواقي قسمة a^n على b حتى نحصل على قيمة للعدد n حيث باقي a^n على b يساوي 1، ويكون الدور حينئذ هو n.

مثال1: دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 4^n على 7

$4^0 \equiv 1[7]$; $4^1 \equiv 4[7]$; $4^2 \equiv 2[7]$; $4^3 \equiv 1[7]$

$4^{3k} \equiv 1[7]$; $4^{3k+1} \equiv 4[7]$; $4^{3k+2} \equiv 2[7]$

مثال2: دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7

$5^0 \equiv 1[7]$; $5^1 \equiv 5[7]$; $5^2 \equiv 4[7]$; $5^3 \equiv 6[7]$; $5^4 \equiv 2[7]$; $5^5 \equiv 3[7]$; $5^6 \equiv 1[7]$

$5^{6k} \equiv 1[7]$; $5^{6k+1} \equiv 5[7]$; $5^{6k+2} \equiv 4[7]$; $5^{6k+3} \equiv 6[7]$; $5^{6k+4} \equiv 2[7]$; $5^{6k+5} \equiv 3[7]$

حالة خاصة: دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي 2^n على 10

$2^0 \equiv 1[10]$; $2^1 \equiv 2[10]$; $2^2 \equiv 4[10]$; $2^3 \equiv 8[10]$; $2^4 \equiv 6[10]$;

$2^5 \equiv 2[10]$; $2^6 \equiv 4[10]$; $2^7 \equiv 8[10]$; $2^8 \equiv 6[10]$;

نلاحظ أنّ الباقي 1 لن يتكرر (لأنّ العدد 2^n زوجي من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$) ، لهذا السبب نتوقف عند تكرار أول باقي يختلف عن 1 (أي 2) ويكون الدور 4.

$2^{4k} \equiv 6[10]$; $2^{4k+1} \equiv 2[10]$; $2^{4k+2} \equiv 4[10]$; $2^{4k+3} \equiv 8[10]$; $k \in \mathbb{N}^*$

بعد دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد a^n على b يُطلب منكم إيجاد باقي قسمة عدد c مرفوع بقوة على b وهنا نميز الحالات التالية :

.1 $\underline{c = a}$

$4^{2014} = 4^{3(671)+1} \Rightarrow 4^{2014} \equiv 4[7]$; $5^{1435} = 5^{6(239)+1} \Rightarrow 5^{1435} \equiv 5[7]$

2. $\underline{c \equiv a[b]}$

$2013 \equiv 4[7] \Rightarrow 2013^{1434} \equiv 4^{3(478)}[7] \Rightarrow 2013^{1434} \equiv 1[7]$

$2014 \equiv 5[7] \Rightarrow 2014^{1995} \equiv 5^{6(332)+3}[7] \Rightarrow 2014^{1995} \equiv 6[7]$

3. $\underline{c \equiv 1[b]}$ أو $\underline{c \equiv -1[b]}$

$8 \equiv 1[7] \Rightarrow 8^n \equiv 1[7]\ ;\ 6 \equiv -1[7] \Rightarrow 6^{2n} \equiv 1[7]$ و $6^{2n+1} \equiv -1[7]$

4. قوة العدد c مختلفة عن الدور

$4^{6k+5} = 4^{3(2k+1)+2} \Rightarrow 4^{6k+5} \equiv 2[7]; 5^{18k+10} = 5^{6(3k+1)+4} \Rightarrow 5^{18k+9} \equiv 2[7]$

أخيرا يُطلب منكم تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل عدد c' القسمة على b. في هذه الحالة نبسط العدد c' ونحلّ الموافقة باستعمال الطرق المذكورة سابقا.

مثال: تعيين قيم العدد الطبيعي n حيث : $19^{6n+3} + 26^{6n+4} + 4n^2 + 4 \equiv 0[7]$

$19 \equiv 5[7] \Rightarrow 19^{6n+3} \equiv 5^{6n+3}[7] \Rightarrow 19^{6n+3} \equiv 6[7]$

$26 \equiv 5[7] \Rightarrow 26^{6n+4} \equiv 5^{6n+4}[7] \Rightarrow 26^{6n+4} \equiv 2[7]$

$19^{6n+3} + 26^{6n+4} + 4n^2 + 4 \equiv 0[7] \Rightarrow 8 + 4n^2 + 4 \equiv 0[7] \Rightarrow 4n^2 + 12 \equiv 0[7]$

$\Rightarrow 4(n^2+3) \equiv 0[7] \Rightarrow n^2 + 3 \equiv 0[7]$ (لأنّ 7 أولي مع 4) $\Rightarrow n^2 \equiv 4[7] \Rightarrow n^2 - 4 \equiv 0[7]$

$\Rightarrow (n-2)(n+2) \equiv 0[7] \Rightarrow n \equiv 2[7]$ أو $n \equiv 5[7] \Rightarrow$ $\boxed{n = 7k+2 \text{ أو } n = 7k+5}$

5. العبارة تشتمل على عددين دور باقي قسمتهما على الترديد مختلف

مثال:

دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العددين 4^n و 8^n على 9

$4^{3k} \equiv 1[9];\ 4^{3k+1} \equiv 4[9];\ 4^{3k+2} \equiv 7[9]; k \in \mathbb{N}$

$8^{2k} \equiv 1[9];\ 8^{2k+1} \equiv 8[9]\ ; k \in \mathbb{N}$

تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون 6 باقي قسمة $(2006^n - 2002^n)$ على 9

$2006^n \equiv 8^n[9];\ 2002^n \equiv 4^n[9];\ 2006^n - 2002^n \equiv 6[9] \Rightarrow 8^n - 4^n \equiv 6[9]$

بما أن بواقي قسمة 4^n و 8^n على 9 لها دورين مختلفين (2 و 3) ، نأخذ المضاعف المشترك الأصغر لهذين الدورين :

$n =$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$\mathbf{6k+4}$	$6k+5$	
$8^n \equiv$	1	8	1	8	**1**	8	[9]
$4^n \equiv$	1	4	7	1	**4**	7	[9]
$8^n - 4^n \equiv$	0	4	3	7	**6**	1	[9]

$\boxed{8^n - 4^n \equiv 6[9] \Rightarrow n = 6k+4\ ; k \in \mathbb{N}}$

6. تعيين الثنائيات $(x;y)$ التي تحقّق: $\boldsymbol{a^x + b^y \equiv c}$[الترديد]

لإيجاد الثنائيات $(x;y)$ نستعمل الجدول المتقاطع $(Tableau\ croisé)$

مثال:

دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة كل من 3^n و 5^n على 16

$3^{4k} \equiv 1[16]\ ;\ 3^{4k+1} \equiv 3[16]\ ;\ 3^{4k+2} \equiv 9[16]\ ;\ 3^{4k+3} \equiv 11[16]$

$5^{4k} \equiv 1[16]\ ;\ 5^{4k+1} \equiv 5[16]\ ;\ 5^{4k+2} \equiv 9[16]\ ;\ 5^{4k+3} \equiv 13[16]$

تعيين جميع الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية حيث : $3^x + 5^y \equiv 0[16]$

	$x =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$y =$	$3^x \equiv$ / $5^y \equiv$	1	3	9	11
$4k'$	1	2	4	10	12
$4k'+1$	5	6	8	14	0
$4k'+2$	9	10	12	2	4
$4k'+3$	13	14	0	6	8

$\boxed{(x,y) \in \{(4k+1; 4k'+3), (4k+3; 4k'+1)\}\ ;\ (k,k') \in \mathbb{N}^2}$

5- حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة $ax + by = c$:

1. تقبل هذه المعادلة حلولا في $\mathbb{Z}$ لمّا يقسم $PGCD(a; b)$ العدد c

مثال 1: المعادلة $7x + 21y = 3$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}$ لأنّ $PGCD(7; 21) = 7$ لا يقسم 3

مثال 2: المعادلة $6x - 5y = 2$ تقبل حلولا في $\mathbb{Z}$ لأنّ $PGCD(6; 5) = 1$ يقسم 2

2. لإيجاد الحل الخاص نستعمل خوارزمية إقليدس

مثال: لنبحث عن حل خاص للمعادلة $27x + 22y = 1$

$$27 = 22 + 5 \quad \Rightarrow \quad 5 = 27 - 22$$

$$22 = 4(5) + 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 22 - 4(5)$$

$$5 = 2(2) + 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 5 - 2(2)$$

$$1 = 5 - 2(2) = 5 - 2[22 - 4(5)] = 9(5) - 2(22)$$

$$1 = 9(27 - 22) - 2(22) = 27(9) + 22(-11) \Rightarrow \boxed{(x_0; y_0) = (9; -11)}$$

ملاحظة هامة : إذا كانت الثنائية $(x_0; y_0)$ حلا خاصا للمعادلة $ax + by = c$ فإنّ الثنائية $(nx_0; ny_0)$ حلا خاصا للمعادلة $ax + by = nc$

مثال: نلاحظ أنّ $(1; 1)$ حل خاص للمعادلة $6x - 5y = 1$ ، منه الثنائية $(2; 2)$ حل خاص للمعادلة $6x - 5y = 2$.

3. لحل المعادلة نستعمل مبرهنة غوص

مثال: حل في $\mathbb{Z}$ للمعادلة $6x - 5y = 2$

$$\begin{cases} 6x - 5y = 2 \\ 6(2) - 5(2) = 2 \end{cases} \Rightarrow 6(x - 2) - 5(y - 2) = 0 \Rightarrow 6(x - 2) = 5(y - 2)$$

بما أنّ 5 يقسم $6(x - 2)$ و 5 أولي مع 6 ، إذن 5 يقسم $(x - 2)$ منه $x = 5k + 2$

بالتعويض في العبارة السابقة نجد: $6(5k) = 5(y - 2)$ منه $y = 6k + 2$

حلول المعادلة هي : $\boxed{S = \{(5k + 2; 6k + 2)\}; k \in \mathbb{Z}}$

ملاحظة: حلول المعادلة $ax - by = c$ تكون من الشكل $(bk + x_0; ak + y_0)$، أمّا حلول المعادلة $ax + by = c$ تكون من الشكل $(bk + x_0; -ak + y_0)$ أو من الشكل $(-bk + x_0; ak + y_0)$

مثال1: حلول المعادلة $27x - 22y = 1$ ذات الحل الخاص $(9; 11)$ هي :

$$\boxed{S = \{(22k + 9\,; 27k + 11)\}\,; k \in \mathbb{Z}}$$

مثال2: حلول المعادلة $11x + 7y = 2$ ذات الحل الخاص $(-3; 5)$ هي :

$$\boxed{S = \{(7k - 3\,; -11k + 5)\} = \{(-7k - 3\,; 11k + 5)\}\,; k \in \mathbb{Z}}$$

4. يمكن حل المعادلة باستعمال الموافقات

مثال1: حل المعادلة $4x - 9y = 19$

$$4x - 9y = 19 \Rightarrow 4x = 9y + 19 \Rightarrow 9y + 19 \equiv 0[4] \Rightarrow y + 3 \equiv 0[4] \Rightarrow y \equiv 1[4] \Rightarrow y = 4k + 1$$

$$4x = 9(4k + 1) + 19 = 36k + 28 = 4(9k + 7) \Rightarrow x = 9k + 7$$

$$\boxed{S = \{(9k + 7; 4k + 1)\}\,; k \in \mathbb{Z}}$$

6- حل المعادلات المشتملة على m و d :

لحل المعادلات المشتملة على $m = PPCM(a; b)$ و $d = PGCD(a; b)$ نتبع الخطوات التالية

1. كتابة a و b بدلالة a' و b'

$$d = PGCD(a; b) \Rightarrow \boxed{a = da'; b = db'; PGCD(a'; b') = 1}$$

2. إيجاد علاقة بين كتابة m و d ، a' و b'

$$m \times d = a \times b \Rightarrow m \times d = da' \times db' \Rightarrow \boxed{m = da'b'}$$

3. تعيين القيم الممكنة لـ a' و b' مع مراعاة الشرط $PGCD(a'; b') = 1$ ، ثمّ استنتاج القيم الممكنة لـ a و b

مثال:

عيّن كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية حيث :

1) $\begin{cases} a+b=420 \\ PGCD(a,b)=84 \end{cases} \dots ① \; ; \; a=84a' \; ; \; b=84b' \; ; \; PGCD(a',b')=1$

$① \Rightarrow 84a'+84b'=420 \Rightarrow 84(a'+b')=420 \Rightarrow a'+b'=5$

$\Rightarrow (a',b') \in \{(1,4);(4,1);(2,3);(3,2)\} \Rightarrow \boxed{(a,b) \in \{(84,336);(336,84);(168,252);(252,168)\}}$

2) $\begin{cases} a \times b=360 \\ PGCD(a,b)=6 \end{cases} \dots ② \; ; \; a=6a' \; ; \; b=6b' \; ; \; PGCD(a',b')=1$

$② \Rightarrow 6a' \times 6b'=360 \Rightarrow 36(a' \times b')=360 \Rightarrow a' \times b'=10$

$\Rightarrow (a',b') \in \{(1,10);(10,1);(2,5);(5,2)\} \Rightarrow \boxed{(a,b) \in \{(6,60);(60,6);(12,30);(30,12)\}}$

3) $\begin{cases} a^2-b^2=825 \\ PGCD(a,b)=5 \end{cases} \dots ③ \; ; \; a=5a' \; ; \; b=5b' \; ; \; PGCD(a',b')=1$

$③ \Rightarrow (5a')^2-(5b')^2=825 \Rightarrow 25\left({a'}^2-{b'}^2\right)=825 \Rightarrow {a'}^2-{b'}^2=33 \Rightarrow (a'-b')(a'+b')=33$

$\begin{cases} a'-b'=1 \\ a'+b'=33 \end{cases} \Rightarrow 2a'=34 \Rightarrow a'=17 \Rightarrow b'=16 \Rightarrow \boxed{(a,b)=(85,80)}$

$\begin{cases} a'-b'=3 \\ a'+b'=11 \end{cases} \Rightarrow 2a'=14 \Rightarrow a'=7 \Rightarrow b'=4 \Rightarrow \boxed{(a,b)=(35,20)}$

ملاحظة: الحالتان $\begin{cases} a'-b'=33 \\ a'+b'=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} a'-b'=11 \\ a'+b'=3 \end{cases}$ مرفوضتان لأنّ $a'+b'>a'-b'$ (a' و b' طبيعيان)

4) $\begin{cases} PPCM(a,b)=90 \\ PGCD(a,b)=18 \end{cases} \dots ④ \; ; \; a=18a' \; ; \; b=18b' \; ; \; PGCD(a',b')=1$

$m.d=a.b=da'.db'=d^2a'b' \Rightarrow m=da'b' \Rightarrow a'b'=\frac{m}{d}=\frac{90}{18}=5$

$(a',b') \in \{(1,5);(5,1)\} \Rightarrow \boxed{(a,b) \in \{(18,90);(90,18)\}}$

5) $\begin{cases} PPCM(a,b)-9PGCD(a,b)=13 \\ a<b \end{cases} \dots ⑤ \; ; \; a=da' \; ; \; b=db' \; ; \; PGCD(a',b')=1$

$⑤ \Rightarrow m-9d=13 \Rightarrow da'b'-9d=13 \Rightarrow d(a'b'-9)=13 \Rightarrow d \mid 13 \Rightarrow d \in \{1,13\}$

$d=1: a'b'-9=13 \Rightarrow a'b'=22 \Rightarrow (a',b') \in \{(1,22);(2,11)\} \Rightarrow \boxed{(a,b) \in \{(1,22);(2,11)\}}$

$d=13: a'b'-9=1 \Rightarrow a'b'=10 \Rightarrow (a',b') \in \{(1,10);(2,5)\} \Rightarrow \boxed{(a,b) \in \{(13,130);(26,65)\}}$

6) $\begin{cases} d+m=156 \\ m=d^2 \end{cases} \dots ⑥ \; ; \; a=da' \; ; \; b=db' \; ; \; PGCD(a',b')=1$

$⑥ \Rightarrow d^2+d-156=0 \Rightarrow d=12 \Rightarrow m=144$

$m=da'b' \Rightarrow a'b'=\frac{m}{d}=12 \Rightarrow (a';b') \in \{(1;12);(12;1);(3;4);(4;3)\}$

$\Rightarrow \boxed{(a;b) \in \{(12;144);(144;12);(36;48);(48;36)\}}$

7- التعداد :

1. لتحويل عدد من النظام العشري إلى نظام غير عشري نجري قسمات متتالية لهذا العدد على الأساس ونكتب البواقي المتحصل عليها من النهاية إلى البداية

$$\begin{array}{r|l} 2014 & 7 \\ \boxed{5} & 287 \;|\; 7 \\ & \boxed{0} \;\; 41 \;|\; 7 \\ & \quad \boxed{6} \;\; 5 \;|\; 7 \\ & \qquad \boxed{5} \;\; 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1435 & 8 \\ \boxed{3} & 179 \;|\; 8 \\ & \boxed{3} \;\; 22 \;|\; 8 \\ & \quad \boxed{6} \;\; 2 \;|\; 8 \\ & \qquad \boxed{2} \;\; 0 \end{array}$$

$2014=\overline{5605}^7$ $\qquad$ $1435=\overline{2633}^8$

2. لتحويل عدد من نظام غير عشري إلى النظام العشري نضرب أرقام العدد في الأساس مرفوع بقوة تناسب رتبة الرقم

$\overline{5605}^7 = 5 + 0(7) + 6(7)^2 + 5(7)^3 = 2014$

$\overline{2633}^8 = 3 + 3(8) + 6(8)^2 + 2(8)^3 = 1435$

3. لحل المعادلات المشتملة على أعداد مكتوبة في أسس مختلفة ، لا بدّ من الانتباه أنّ كل أرقام العدد هي أصغر تماما من الأساس ، وبعد كتابة الأعداد في النظام العشري (غالبا) ما تحصلون على المعادلة المطلوب حلها في بداية السؤال.

مثال 1:

1) حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة $7x - 9y = -19$

2) نعتبر العدد الطبيعي n الذي يُكتب $\overline{2\alpha 5}$ في نظام العد ذي الأساس 7، و يُكتب $\overline{1\beta 3}$ في نظام العد ذي الأساس 9.
عيّن α و β ، ثمّ اكتب العدد n في النظام العشري.

$$7x - 9y = -19 \Rightarrow \boxed{S = \{(9k+5\,;7k+6)\}\,;k \in \mathbb{Z}}$$

$$n = \overline{2\alpha 5}^7 = \overline{1\beta 3}^9 \Rightarrow 2(7)^2 + 7\alpha + 5 = 9^2 + 9\beta + 3$$

$$\Rightarrow 7\alpha - 9\beta = -19 \Rightarrow (\alpha;\beta) = (9k+5\,;7k+6)$$

$$\begin{cases} 0 \le \alpha < 7 \\ 0 \le \beta < 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le 9k+5 < 7 \\ 0 \le 7k+6 < 9 \end{cases} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 5\,;\ \beta = 6\,;n = 138}$$

مثال 2:

1- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $23x - 17y = 6$

2- استنتج الأعداد الطبيعية A الأصغر من 1000 حيث $A \equiv 2[23]$ و $A \equiv 8[17]$

3- اكتب هذه الأعداد في النظام ذي الأساس 7

$$23x - 17y = 6 \Rightarrow \boxed{S = \{(17k+1\,;\ 23k+1)\}\,;\ k \in \mathbb{Z}}$$

$$A = 23x + 2 = 17y + 8 \Rightarrow 23x - 17y = 6 \Rightarrow (x;y) = (17k+1\,;\ 23k+1)$$

$k = 0 :\ (x;y) = (1\,;1)\,;A = 25 = \overline{34}^7$

$k = 1 :\ (x;y) = (18\,;24)\,;A = 416 = \overline{1133}^7$

$k = 2 :\ (x;y) = (35\,;47)\,;A = 807 = \overline{2232}^7$

8- تذكّر :

1. إذا كان d يقسم a و d يقسم b فإنّ d يقسم $\alpha a + \beta b$ ، $(\alpha;\beta) \in \mathbb{Z}^2$
2. إذا كان a يقسم bc و a أولي مع b فإنّ a يقسم c $(Gauss)$
3. إذا كان $PGCD(a;b) = 1$ فإنّ $PGCD(a;b;c) = 1$ مهما يكن العدد c
4. إذا كان $PGCD(a;b) = 1$ فإنّ $PGCD(a^n;b^n) = 1$ مهما يكن العدد n
5. إذا وُجِدت ثنائية $(\alpha;\beta) \in \mathbb{Z}^2$ حيث : $\alpha a + \beta b = 1$ ، فإنّ a و b أوليان فيما بينهما $(Bézout)$
6. إذا كان a و b أوليين فيما بينهما فإنّ : $a + b$ و ab أوليان فيما بينهما ، كذلك $(a+b)^2$ و ab أوليان فيما بينهما.

كيفية استعمال الآلة الحاسبة
CASIO FX-991 ES PLUS

1. حل معادلة من الدرجة الثانية

أ. $x^2+3x-4=0$

[MODE] [5] (EQN) [3] $(ax^2+bx+c=0)$ [1] [=] (a) [3] [=] (b) [−] [4] [=] (c) [=] (1) [=] (-4)

ب. $x^2+2x+17=0$

[AC] [1] [=] (a) [2] [=] (b) [1] [7] [=] (c) [=] $(-1+4i)$ [=] $(-1-4i)$

2. حل معادلة من الدرجة الثالثة $x^3+x^2+x+1=0$

[MODE] [5] (EQN) [4] $(ax^3+bx^2+cx+d=0)$ [1] [=] (a) [1] [=] (b) [1] [=] (c) [1] [=] (d) [=] (-1) [=] (i) [=] $(-i)$

3. حل جملة معادلتين $\begin{cases}2x+3y=8\\7x-4y=-1\end{cases}$

[MODE] [5] (EQN) [1] $(a_nx+b_ny=c_n)$ [2] [=] [3] [=] [8] [=] [7] [=] [−] [4] [=] [−] [1] [=] [=] (1) [=] (2)

4. حل جملة 3 معادلات (تقاطع 3 مستويات في الفضاء) $\begin{cases}x-2y+z-3=0\\-2x+y+z=0\\x+y+z-6=0\end{cases}$

[MODE] [5] (EQN) [2] $(a_nx+b_ny+c_nz=d_n)$ [1] [=] [−] [2] [=] [1] [=] [3] [=] [−] [2] [=] [1] [=] [1] [=] [0] [=] [1] [=] [1] [=] [1] [=] [6] [=] [=] (2) [=] (1) [=] (3)

$(P)\cap(Q)\cap(ABC)=I(2;1;3)$ (لاحظ أنّ قيم d تنقل إلى الطرف الثاني)

5. تعيين نقاط مساعدة لرسم منحنى بياني $f(x)=x-4+\ln(1+e^{3x})$ **على المجال** $[-5;5]$

[MODE] [7] (TABLE) [ALPHA] [)] (X) [−] [4] [+] [ln] [1] [+] [SHIFT] [ln] (e^x) [3] [ALPHA] [)] [▶] [)] [=] [−] [5] [=] (Start ?بداية المجال) [5] [=] (End ?نهاية المجال) [1] [=] (Step ? الخطوة)

6. حصر العدد α الذي يعدم الدالة $g(x)=1+x-xlnx$

[MODE] [7] [1] [+] [ALPHA] [)] [−] [ALPHA] [)] [ln] [ALPHA] [)] [=] [1] [=] [5] [=] [1] [=]

	X	F(X)
1	1	2
2	2	1.6137
3	3	0.7041
4	4	-0.545
5	5	-2.047

نلاحظ أنّ $3<\alpha<4$. لإيجاد حصر للعدد α سعته 10^{-1} نقوم بالعملية التالية :

[AC] [=] [3] [=] (Start ?) [4] [=] (End ?) [0] [•] [1] [=] (Step ?)

نستنتج أنّ $3{,}5<\alpha<3{,}6$. بنفس الطريقة يمكننا إيجاد حصر للعدد α سعته 10^{-2} حيث نحدّد بداية المجال عند 3,5 ونهايته عند 3,6 والخطوة 0,01

6	3.5	0.1153
7	3.6	-0.011

7. كتابة عدد مركب على شكله الجبري

1) $z_1=(1+2i)^2$: [MODE] [2] (CMPLX) [(] [1] [+] [2] [ENG] (i) [)] [x^2] [=] $(-3+4i)$

2) $z_2=\frac{5+11\sqrt{3}i}{7-4\sqrt{3}i}$: [AC] [▭/▭] [5] [+] [1] [1] [√▭] [3] [▶] [ENG] [▼] [7] [−] [4] [√▭] [3] [▶] [ENG] [=]

8. تعيين طويلة وعمدة عدد مركب

1) $z_1=1+i$: [1] [+] [ENG] [SHIFT] [2] (CMPLX) [3] $(r\angle\theta)$ [=] $(\sqrt{2}\angle45)$

لإيجاد قيمة θ بالراديان نقوم بالعملية التالية : [SHIFT] [MODE] [4] (Rad)

2) $z_2=(3+\sqrt{3})+(-3+\sqrt{3})i$:

[3] [+] [√▭] [3] [▶] [+] [(] [−] [3] [+] [√▭] [3] [▶] [)] [ENG] [SHIFT] [2] [3] [=] $(2\sqrt{6}\angle-\frac{1}{12}\pi)$

3) $z_3=\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$: [▭/▭] [1] [+] [ENG] [▼] [√▭] [3] [▶] [+] [ENG] [▶] [SHIFT] [2] [3] [=] $(\frac{\sqrt{2}}{2}\angle\frac{1}{12}\pi)$

9. للانتقال من الشكل المثلثي أو الأسّي إلى الشكل الجبري

1) $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$:

[4] [SHIFT] [(−)] $(\angle)$ [▭] [SHIFT] [×10ˣ] (π) [▼] [4] [▶] [SHIFT] [2] (CMPLX) [4] $(a+bi)$ [=] $\left(2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i\right)$

2) $z_2 = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{5}e^{i\frac{\pi}{6}}$:

[√▭] [5] [▶] [SHIFT] [(−)] [▭] [SHIFT] [×10ˣ] [▼] [6] [▶] [SHIFT] [2] [4] [=] $\left(\frac{\sqrt{15}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}i\right)$

10. حساب العدد المشتق

$f(x) = x^2 - 1 + 2\ln x\ ;\ x_0 = 2$:

[SHIFT] [∫▭] $\left(\frac{d}{dx}\right)$ [ALPHA] [)] [x²] [−] [1] [+] [2] [ln] [ALPHA] [)] [)] [▶] [2] (x_0) [=] (5)

11. حساب التكامل

$I = \int_1^2 (x + 2 - 3e^{2x})\, dx$:

[∫▭] [▲] [2] [▼] [1] [◀] [◀] [(] [ALPHA] [)] [+] [2] [−] [3] [SHIFT] [ln] [2] [ALPHA] [)] [▶] [)] [=]

12. حساب حدود متتالية عددية

$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} ; u_0 = 1$: [▭] [ALPHA] [)] [▼] [√▭] [ALPHA] [)] [x²] [+] [1] [CALC] [1] [=] $\left(u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

[CALC] [Ans] [=] $\left(u_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ [CALC] [Ans] [=] $\left(u_3 = \frac{1}{2}\right)$ …

13. لإيجاد القيم المقرّبة لكسر أو جذر

$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{23}{20} = 1{,}15$: [▭] [2] [▼] [5] [▶] [+] [▭] [3] [▼] [4] [=] $\left(\frac{23}{20}\right)$ [S⇔D] $(1{,}15)$

$\sqrt{2} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2}$: [√▭] [2] [▶] [+] [√▭] [8] [=]

$\sqrt{2} + \sqrt{8} \approx 4{,}24$: [√▭] [2] [▶] [+] [√▭] [8] [SHIFT] [=]

14. لإيجاد معادلة مستقيم الانحدار (خاص بشعبة التسيير والاقتصاد)

مثال : التمرين الثاني للموضوع الأول (بكالوريا 2011)

x_i (بالسنوات) الأقدمية	2	8	15	19	24
y_i (بالدنانير) الأجرة	32400	35400	39600	41400	44700

[MODE] [3] [2] (x_i إدخال قيم) [2] [=] [8] [=] [1] [5] [=] [1] [9] [=] [2] [4] [=] [▼] [▶]

(y_i إدخال قيم) [3] [2] [4] [0] [0] [=] [3] [5] [4] [0] [0] [=] [3] [9] [6] [0] [0] [=]

[4] [1] [4] [0] [0] [=] [4] [4] [7] [0] [0] [=] [AC] [SHIFT] [1] [5] [2] [=]

$(a = 556{,}356)$ [SHIFT] [1] [5] [1] [=] $(b = 31133{,}55)$

ملاحظة : يمكننا أيضا الحصول على إحداثيي النقطة المتوسطة بإجراء العمليات التالية :

[SHIFT] [1] [4] [2] [=] $(\bar{x} = 13; 6)$ [SHIFT] [1] [4] [5] [=] $(\bar{y} = 38700)$