التمارين

تمارين تطبيقية

1 - الدوال الأصلية

1 نبين أن $F'(x)=f(x)$

2 1) الدالة الأصلية للدالة f هي H 2) الدالة الأصلية للدالة f هي H
3) الدالة الأصلية للدالة g هي K 4) الدالة الأصلية للدالة h هي F
5) الدالة الأصلية للدالة k هي G

2 ـ حساب الدوال الأصلية

22 5) $f(x)=e^{-2x}\left(e^{-2x}+2\right)^3=-\frac{1}{2}\left[-2e^{-2x}\left(e^{-2x}+2\right)^3\right]$

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $F:x\mapsto -\frac{1}{8}\left(e^{-2x}+2\right)^4+c$ حيث c ثابت حقيقي.

23 5) $f(x)=\frac{1}{x(\ln x+2)^2}=\frac{1}{x}\times\frac{1}{(\ln x+2)^2}$

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$ هي الدوال $F:x\mapsto -\frac{1}{\ln x+2}+c$ حيث c ثابت حقيقي

25 5) $f(x)=\frac{2e^x}{\sqrt{e^x-1}}=2\times\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}$ ، $I=]0;+\infty[$

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$ هي الدوال $F:x\mapsto 4\sqrt{e^x-1}+c$ حيث c ثابت حقيقي

27 4) $f(x)=\frac{6x+3}{x^2+x+1}=3\times\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $F:x\mapsto 3\ln\left(x^2+x+1\right)+c$ حيث c ثابت حقيقي.

28 4) $f(x)=\frac{3}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=-3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$ ؛

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ هي الدوال $F:x\mapsto -3e^{\frac{1}{x}}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

29 3) $f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{x^3+1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3x^2}{x^3+1}$ ؛

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ هي الدوال $F:x\mapsto\frac{1}{6}\ln\left(x^3+1\right)+c$ حيث c ثابت حقيقي.

30 3) $f(x)=\sin x\cos x$

دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدالة $F:x\mapsto\frac{1}{2}(\sin x)^2$ أو الدالة $G:x\mapsto -\frac{1}{2}(\cos x)^2$

3 ـ المعادلات التفاضلية

31 1) $y=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+c$ 2) $y=x^2+x+\frac{1}{x}+c$

3) $y'=\frac{x^2+1}{x^2}=1+\frac{1}{x^2}$ و $y=x-\frac{1}{x}+c$ 4) $y=-\frac{3}{2}cs(2x)+c$ ، c ثابت حقيقي

تمارين تطبيقية

44 $f(x)=\sin x\left(a\cos^2 x+b\cos^4 x\right)$

$$f(x)=\sin x\left(\sin^2 x\ \cos 2x\right)$$
$$f(x)=\sin x\left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x$$
$$f(x)=\sin x\left(\cos^2 x-\cos^4 x\right)$$
$$F(x)=-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x$$

48 (1 $u'(x)=\dfrac{\cos^4 x+3\sin^2 x\ \cos^2 x}{\cos^6 x}$ ،

$$u'(x)=\frac{\cos^2 x+3\left(1-\cos^2 x\right)\sin^2 x}{\cos^4 x}=\frac{3}{\cos^4 x}-\frac{2}{\cos^2 x}$$

(2 $v(x)=\dfrac{1}{3}\left[u'(x)+\dfrac{2}{\cos^2 x}\right]$

الدوال الأصلية للدالة v على $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ معرفة بـــ $x\mapsto\frac{1}{3}\left[u(x)+2\tan x\right]+k$ حيث k ثابت حقيقي

بما أن $V(0)=0$ فإن $k=0$ و $V(x)=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}+2\tan x\right]$.

37 .1 $f(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{(x-1)^3}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(x+1)^3}$

.2 مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $]1;+\infty[$ هي الدوال من الشكل:

$x\mapsto-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{(x+1)^2}+k$ حيث k ثابت حقيقي

.3 $F(0)=1$ معناه $-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{(0-1)^2}-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{(0+1)^2}+k=1$ أي $k=\dfrac{3}{2}$

و بالتالي $F(x)=-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{3}{2}$

43 .1 $f(x)=\sin x+\sin^3 x=\sin x\left(1+\sin^2 x\right)=\sin x\left(2-\cos^2 x\right)=2\sin x-\sin x\cos^2 x$

.2 $F(x)=-2\cos x+\dfrac{1}{3}\cos^3 x$

44 .1 $f(x)=\sin^3 x\cos^2 x=\sin x\left(\sin^2 x\cos^2 x\right)$

$$f(x)=\sin x\left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x$$
$$f(x)=\sin x\left(\cos^2 x-\cos^4 x\right)$$

.2 $F(x)=-\dfrac{1}{3}\cos^3 x+\dfrac{1}{5}\cos^5 x$

45 .1 $f(x)=\sin^4 x\cos^5 x=\cos x\left(\sin^4 x\cos^4 x\right)$

$$f(x)=\cos x\sin^4 x\left(1-\sin^2 x\right)^2=\cos x\left(\sin^4 x-2\sin^6 x+\sin^8 x\right)$$

2. $F(x)=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x$

46 1. $f'(x)=4\cos x\sin^3 x$ و $f''(x)=-4\sin^4 x+12\cos^2 x\sin^2 x$

2. $f''(x)=-4f(x)+12\left(1-\sin^2 x\right)\sin^2 x$

$f''(x)=-4f(x)+12\sin^2 x-12\sin^4 x$

$f''(x)=-16f(x)+12\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$

$f''(x)=-16f(x)-6\cos 2x+6$ ومنه $f(x)=-\frac{1}{16}f''(x)-\frac{3}{8}\cos 2x+\frac{3}{8}$

3. نستنتج أن الدالة $F:x\mapsto-\frac{1}{16}f'(x)-\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{8}x$ أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

أي $F(x)=-\frac{1}{4}\cos x\sin^3 x-\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{8}x$

47 تصويب : $f(x)=\tan^{2004} x+\tan^{2006} x$

يمكن أن نكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=\left(1+\tan^2 x\right)\tan^{2004} x$ و هي من الشكل $u'u^n$ حيث $u(x)=\tan x$

و هي مستمرة على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ، إذن دالتها الأصلية على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ هي $F(x)=\frac{1}{5}\tan^{2005} x$

57 $f(x)=e^x\cos x$

1. $f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$ و $f''(x)=e^x(-2\sin x)$

2. $f(x)=af''(x)+bf'(x)$ معناه $\left(a=-\frac{1}{2}\right)$ و $(b=1)$

إذن $f(x)=-\frac{1}{2}f''(x)+f'(x)$

3. نستنتج أن الدالة $F:x\mapsto-\frac{1}{2}f'(x)+f(x)$ أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

أي $F(x)=\frac{1}{2}e^x\cos x+\frac{1}{2}e^x\sin x=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)$

58 $F(x)=\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)e^{2x}$

$F'(x)=\left(2ax^3+(2b+3a)x^2+(2c+2b)x+2d+c\right)e^{2x}$

من اجل كل عدد حقيقي x : $F'(x)=f(x)$ معناه $\left(a=\frac{1}{2}\right)$ و $\left(b=-\frac{3}{4}\right)$ و $\left(c=\frac{3}{4}\right)$ و $\left(d=-\frac{3}{8}\right)$

$F(x)=\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{8}\right)e^{2x}$