## حل التمرين 1 ص 26 ج1 :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{3x-2}{x+1}$ .

1) إيجاد عدد حقيقي $A$ حيث إذا كان $x>A$ فإن $f(x)$ تنتمي إلى المجال $]2,9;3,1[$ :

لدينا $2,9<f(x)<3,1$ ومنه $2,9\times\dfrac{x+1}{x+1}<\dfrac{3x-2}{x+1}<3,1\times\dfrac{x+1}{x+1}$ ، أي $2,9(x+1)<3x-2<3,1(x+1)$

ومنه $2,9(x+1)+2<3x<3,1(x+1)+2$ أي $2,9x+4,9<3x<3,1x+5,1$

ولدينا $3x-3,1x-5,1<0$ و $2,9x+4,9-3x<0$ ، ومنه $-0,1x<5,1$ و $-0,1x<-4,9$

إذن : $x>-\dfrac{5,1}{0,1}$ و $x>\dfrac{4,9}{0,1}$

أي أن $A=49$ ، لأن $-51$ لا تنتمي إلى مجال تعريف الدالة $f$ .

2) إثبات أن المستقيم $\Delta$ الذي معادلته $y=3$ مقارب للمنحنى $C_f$ الممثل للدالة $f$ :

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=3$ مقارب لمنحنى الدالة $f$ .

3) دراسة وضعية المنحنى $C_f$ بالنسبة إلى المستقيم $\Delta$ :

لدينا : $f(x)-3=\dfrac{3x-2}{x+1}-3=\dfrac{3x-2-3x-3}{x+1}=\dfrac{-5}{x+1}$ ، أي $\dfrac{-5}{x+1}<0$

ومنه $f(x)-3<0$ ، إذن : المنحنى $C_f$ يقع تحت المستقيم $(\Delta):y=3$ .



## حل التمرين 2 ص 26 ج1 :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ :

1) إيجاد عدد حقيقي $A$ حيث إذا كان $x<A$ فإن $f(x)$ تنتمي إلى المجال $]0,9;1,1[$ :

لدينا $0,9<f(x)<1,1$ ومنه $0,9\times\dfrac{x-1}{x-1}<\dfrac{x+1}{x-1}<1,1\times\dfrac{x-1}{x-1}$ ، أي $0,9(x-1)<x+1<1,1(x-1)$

ومنه $0,9(x-1)-1<x<1,1(x-1)-1$ أي $0,9x-1,9<x<1,1x+0,1$

ولدينا $x-1,1x-0,1<0$ و $0,9x-1,9-x<0$ ، ومنه $0,1x<0,1$ و $-1,9x<1,9$

إذن : $x<1$ و $x>-1$

أي أن $A=1$ ، لأن $-1$ لا تنتمي إلى مجال تعريف الدالة $f$ .

2) إثبات أن المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحنى $C_f$ الممثل للدالة $f$ :

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب لمنحنى الدالة $f$ .

3) دراسة وضعية المنحنى $C_f$ بالنسبة إلى المستقيم $\Delta$ :

لدينا : $f(x)-1=\dfrac{x+1}{x-1}-1=\dfrac{x+1-x+1}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}$ ، أي $\dfrac{2}{x-1}>0$

ومنه $f(x)-1>0$ ، إذن : المنحنى $C_f$ يقع فوق المستقيم $(\Delta):y=1$ .

## حل التمرين 3 ص 26 ج1 :

- إثبات باستعمال التعريف أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$ :

لدينا حسب التعريف : نهاية $l$ على $+\infty$ أو $-\infty$ يساوي الصفر
ولدينا هنا لمّا $x$ يؤول إلى $+\infty$ : 1 على $+\infty$ ناقص 1 يساوي حسب التعريف : 0 أي :
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$ .

## حل التمرين 4 ص 26 ج1 :

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x-3$ :

- إثبات باستعمال التعريف أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ :

لدينا حسب التعريف : نهاية $l>0$ في $+\infty$ تساوي $+\infty$ .
ولدينا هنا لمّا $x$ يؤول إلى $+\infty$ : $2>0$ في $+\infty$ ناقص 3 يساوي حسب التعريف : $+\infty$ ، أي
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ .

## حل التمرين 5 ص 26 ج1 :



لتكن الدالة $f$ المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ : $f(x)=\sqrt{1-x}$ :

- إثبات باستعمال التعريف أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ :

لدينا حسب التعريف بغض النظر عن الجذر : نهاية $l<0$ في $-\infty$ تساوي $+\infty$ .
ولدينا هنا لمّا $x$ يؤول إلى $-\infty$ : 1 ناقص $-1<0$ في $-\infty$ يساوي حسب التعريف : $+\infty$ ، أي :
$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{1-x}\right]=+\infty$ .

## حل التمرين 6 ص 26 ج1 :

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$ ، وليكن $C_f$ تمثيلها البياني في معلم :

1) إثبات أن المستقيم $\Delta$ الذي معادلته $y=x$ مقارب للمنحنى $C_f$ عند $+\infty$ :

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+\frac{1}{x-1}-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x-1}\right]=0$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة
$y=x$ مقارب لمنحنى الدالة $f$ عند $+\infty$ .

2) دراسة وضعية المنحنى $C_f$ بالنسبة إلى المستقيم $\Delta$ :

لدينا $f(x)-(x)=x+\frac{1}{x-1}-x=\frac{1}{x-1}$ ، أي $\frac{1}{x-1}>0$
ومنه $f(x)-(x)>0$ ، إذن : المنحنى $C_f$ يقع فوق المستقيم $(\Delta):y=x$ .

## حل التمرين 7 ص 26 ج1 :

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x-1-\frac{2}{x^2+1}$ ، وليكن $C_f$ تمثيلها البياني في معلم :

1) إثبات أن المستقيم $\Delta$ الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب للمنحنى $C_f$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ :

لدينا : $\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{2}{x^2+1}\right]=0$ $=\lim_{x\to-\infty}\left[2x-1-\frac{2}{x^2+1}-2x-1\right]$ $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-2x-1\right]=$ ، و

$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x-1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[2x-1-\frac{2}{x^2+1}-2x-1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2}{x^2+1}\right]=0$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=2x-1$ مقارب لمنحنى الدالة $f$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ .

2) دراسة وضعية المنحنى $C_f$ بالنسبة إلى المستقيم $\Delta$ :

لدينا $f(x)-(2x-1)=2x-1-\frac{2}{x^2+1}-(2x-1)=-\frac{2}{x^2+1}$ ، أي $-\frac{2}{x^2+1}<0$

ومنه $f(x)-(2x-1)<0$ ، إذن : المنحنى $C_f$ يقع أسفل المستقيم $(\Delta): y=2x-1$ .

## حل التمرين 8 ص 26 ج1 :

أ) لدينا $f$ دالة معرفة بـ : $f(x)=1+\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ حيث $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ ، وليكن $C_f$ تمثيلها البياني في معلم :

- إثبات أن $C_f$ يقبل المستقيم $(\Delta): y=1$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$ :

لدينا : $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right]=0$ $=\lim_{x\to-\infty}\left[1+\frac{1}{\sqrt{|x|}}-1\right]$ $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-1\right]=$ ، و

$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{1}{\sqrt{|x|}}-1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right]=0$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب لمنحنى الدالة $f$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ .



- تحديد وضعية المنحنى بالنسبة إلى $\Delta$ :

لدينا $f(x)-(1)=1+\frac{1}{\sqrt{|x|}}-1=\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ ، أي $\frac{1}{\sqrt{|x|}}>0$

ومنه $f(x)-(1)>0$ ، إذن : المنحنى $C_f$ يقع فوق المستقيم $(\Delta): y=1$ .

ب) لدينا $f$ دالة معرفة بـ : $f(x)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{x^2}$ ، وليكن $C_f$ تمثيلها البياني في معلم :

- إثبات أن $C_f$ يقبل المستقيم $(\Delta): y=-\frac{1}{3}$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$ :

**قاعدة :**

$f$ دالة معرفة بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+d}$ ، لإثبات أن المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب لمنحنى الدالة يكفي حساب نهاية الجزء $\frac{c}{x+d}$ عند $-\infty$ أو عند $+\infty$

فإذا كانت النهاية تساوي الصفر فالمستقيم $y=ax+b$ مقارب لمنحنى الدالة عند $-\infty$ أو عند $+\infty$ .

لدينا في هذه الدالة: $\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{x^2}\right]=0$ ومنه المستقيم $(\Delta): y=-\frac{1}{3}$ مستقيم مقارب عند $-\infty$ ، وكذلك عند $+\infty$

- تحديد وضعية المنحنى بالنسبة إلى $\Delta$ :

لدينا $f(x)-\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{x^2}$ ، أي $-\frac{1}{x^2}<0$ إذن : المنحنى $C_f$ يقع تحت $(\Delta): y=-\frac{1}{3}$

## حل التمرين 9 ص 26 ج1 :

أ) لدينا $f$ دالة معرفة بـ : $f(x)=2x+1+\frac{5}{x-3}$ حيث $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$، وليكن $C_f$ تمثيلها البياني :

- إثبات أن $C_f$ يقبل المستقيم $(\Delta): y=2x+1$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$ :

لدينا في هذه الدالة: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{5}{x-3}\right]=0$ ومنه المستقيم $(\Delta): y=2x+1$ مستقيم مقارب عند $-\infty$ ،

وكذلك عند $+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{5}{x-3}\right]=0$ .

- تحديد وضعية المنحنى بالنسبة إلى $\Delta$ :

لدينا $f(x)-(2x+1)=2x+1+\frac{5}{x-3}-2x-1=\frac{5}{x-3}$ ، أي $\frac{5}{x-3}>0$ إذن : المنحنى $C_f$ يقع فوق المستقيم $(\Delta): y=2x+1$

ب) لدينا $f$ دالة معرفة بـ : $f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2-1}$ ، وليكن $C_f$ تمثيلها البياني في معلم :

- إثبات أن $C_f$ يقبل المستقيم $(\Delta): y=-\frac{1}{2}x$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$ :

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x^2-1}\right]=0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+\frac{1}{2}x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{2}x\right]$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+\frac{1}{2}x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{2}x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x^2-1}\right]=0$ ، ومنه المستقيم

$(\Delta): y=-\frac{1}{2}x$ مقارب لمنحنى الدالة $f$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ .

- تحديد وضعية المنحنى بالنسبة إلى $\Delta$ :

لدينا $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{2}x=\frac{x}{x^2-1}$ ، أي $\frac{x}{x^2-1}>0$ إذن : المنحنى $C_f$ يقع فوق المستقيم $(\Delta): y=-\frac{1}{2}x$ .



## حل التمرين 10 ص 26 ج1 :

أ) لدينا $f$ دالة معرفة بـ : $f(x)=x+3-\frac{2}{|x|}$ ، وليكن $C_f$ تمثيلها البياني في معلم:

- إثبات أن $C_f$ يقبل المستقيم $(\Delta): y=x+3$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$ :

لدينا في هذه الدالة: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\frac{2}{|x|}\right]=0$ ومنه المستقيم $(\Delta): y=x+3$ مستقيم مقارب عند $-\infty$ ، وكذلك

عند $+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{2}{|x|}\right]=0$ .

- تحديد وضعية المنحنى بالنسبة إلى $\Delta$ :

لدينا $f(x)-(x+3)=x+3-\frac{2}{|x|}-x-3=-\frac{2}{|x|}$ ، أي $-\frac{2}{|x|}<0$ إذن : المنحنى $C_f$ يقع تحت المستقيم $(\Delta): y=x+3$ .

ب) لدينا $f$ دالة معرفة بــ : $f(x)=\frac{\sin x}{x}-x+1$ ، وليكن $C_f$ تمثيلها البياني في معلم:

- إثبات أن $C_f$ يقبل المستقيم $(\Delta): y=-x+1$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$ :

لدينا : $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\sin x}{x}-x+1+x-1\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\sin x}{x}\right]\neq 0$ ، و نفس الشيء عند $+\infty$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=-x+1$ ليس بمستقيم مقارب لمنحنى الدالة $f$ عند $-\infty$ وَ لا عند $+\infty$

- تحديد وضعية المنحنى بالنسبة إلى $\Delta$ :

لدينا $f(x)-(-x+1)=f(x)=\frac{\sin x}{x}-x+1+x-1=\frac{\sin x}{x}$ ، أي أنه لا يمكن تحديد إشارة $\frac{\sin x}{x}$

إذن : المنحنى $C_f$ يقع تحت المستقيم $(\Delta): y=x+3$ .



## حل التمرين 11 ص 26 ج1 :

أ) لدينا $f$ دالة معرفة بــ : $f(x)=\frac{x^2+x-1}{1-2x}$ ، حيث $D_f=\mathbb{R}$ ، وليكن $C_f$ تمثيلها البياني في معلم :

- إثبات أن $C_f$ يقبل المستقيم $(\Delta): y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$ :

لدينا في هذه الدالة:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+x-1}{1-2x}-\left(-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+x-1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}-x^2-\frac{6x}{4}}{1-2x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-\frac{1}{4}}{1-2x}\right]=0$$

ومنه المستقيم $(\Delta): y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$ مستقيم مقارب عند $-\infty$ ، وكذلك عند $+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-\frac{1}{4}}{1-2x}\right]=0$ .

- تحديد وضعية المنحنى $C_f$ بالنسبة إلى $\Delta$ :

لدينا $f(x)-(x+3)=\frac{x^2+x-1}{1-2x}+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}=-\frac{\frac{1}{4}}{1-2x}$ ، أي $-\frac{\frac{1}{4}}{1-2x}<0$ إذن : المنحنى $C_f$ يقع تحت المستقيم $(\Delta): y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$ .

ب) لدينا $f$ دالة معرفة بــ : $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-1}$ ، وليكن $C_f$ تمثيلها البياني في معلم :

- إثبات أن $C_f$ يقبل المستقيم $(\Delta): y=x$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$ :

لدينا في هذه الدالة: $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3+1}{x^2-1}-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3+1-x^3+x^2}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{x^2}\right]=1$

ومنه المستقيم $(\Delta): y=x$ ليس بمستقيم مقارب عند $-\infty$ ، و لا عند $+\infty$ لأن : $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x^2}\right]=1$ .

- تحديد وضعية المنحنى بالنسبة إلى $\Delta$ :

لدينا $f(x)-x=\frac{x^3+1}{x^2-1}-x=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ ، أي $\frac{x^2+1}{x^2-1}>0$ إذن : المنحنى $C_f$ يقع فوق المستقيم $(\Delta): y=x$ .